ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΕΡΟΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΡΟΪΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΠΛΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΚΩΔΙΚΩΝ ΓΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΡΟΪΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Ανδρέας Ιων Ταμπάκης

Α.Μ. 1051355

Επιβλέπων: Παπαδόπουλος Πολύκαρπος
Επίκουρος Καθηγητής

Διπλωματική εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών του

Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ, Ιούλιος

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανολόγων Αεροναυπηγών
Ανδρέας Ιων Ταμπάκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΕΡΟΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε

από τον

Ανδρέας Ιων Ταμπάκης

Α.Μ. 1051355

13/07/2022

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΡΟΪΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΠΛΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΚΩΔΙΚΩΝ ΓΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΡΟΪΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Ανδρέας Ταμπάκης

Σε αυτή την εργασία έγινε υπολογιστική και θεωρητική μελέτη ρευστομηχανικής. Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε μια εισαγωγή στις εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ρευστών. Δίνονται αποδείξεις για τις εξισώσεις ενέργειας, ορμής και την εξίσωση συνέχειας σε διατηρητική και μη διατηρητική μορφή. Επίσης γίνεται ανάλυση στη σημαντικότητα των συνοριακών συνθηκών και στην κατηγοριοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με τα φυσικά φαινόμενα που περιγράφουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, έγινε ανάλυση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών και της μεθόδου πεπερασμένου όγκου. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην περιγραφή της αστρόβιλης, ασυμπίεστης και χωρίς ιξώδες ροής η οποία περιγράφεται από την εξίσωση Laplace.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνονται όλες οι υπολογιστικές εφαρμογές. Κατασκευάστηκαν διάφορα προγράμματα στην γλώσσα Python για την προσομοίωση της ροής αστρόβιλου, ασυμπίεστου και χωρίς ιξώδες ρευστού. Η πρώτη εφαρμογή έγινε με βάση τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που λύθηκε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο και τα αποτελέσματα ήταν πολύ ικανοποιητικά. Έγινε προσομοίωση της ροής σε μη ορθογώνιες γεωμετρίες σε ροές που είναι γνωστές και τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά. Στην συνέχεια δημιουργήθηκαν μεγάλες πλεγματικές διατάξεις με ορθογώνια παραλληλόγραμμα σε διάφορους προσανατολισμούς και μεγέθη να παρεμβάλλονται στην ροή. Η ροή είχε τα αναμενόμενα αποτελέσματα, τα οποία συγκρίθηκαν με γνωστά πειράματα. Στην συνέχεια των υπολογιστικών εφαρμογών μελετήθηκε η

ροή ανάμεσα από 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Σε κάθε υπολογιστική εφαρμογή τα σχήματα είχαν διαφορετικό μέγεθος και αποστάσεις μεταξύ τους. Στην τελευταία εφαρμογή έγινε μελέτη της ροής ανάμεσα από 4 και 5 τετράγωνα σε διαφορετικές διατάξεις. Με βάση τις προηγούμενες προσομοιώσεις και τα αποτελέσματα είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι οι προσομοιώσεις σε φαράγγια δρόμου είναι σωστή.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο έγινε μελέτη της ροής ρύπων μέσα σε φαράγγια δρόμων. Αυτή η μελέτη βασίστηκε στην εργασία CFD MODELLING OF AIR POLLUTION MOTION INSIDE A BUILDING BLOCK, η οποία δημοσιεύτηκε από μέλη του εργαστηρίου μηχανικής ρευστών. Σε αυτή την ανάλυση μελετήθηκε η ροή των ρύπων CO_2, CH_6, NO_2 , για διαφορετικές ταχύτητες, με την χρήση του εμπορικού πακέτου Fluent.

Λέξεις κλειδιά

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, Ροή ρύπων, Αριθμητικές μέθοδοι, Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, εξίσωση Laplace

ABSTRACT

APPLICATION OF NUMERICAL ANALYSIS TECHNIQUES FOR THE SOLUTION OF THE STREAM FUNCTION AND DEVELOPMENT OF SIMPLE COMPUTATIONAL CODES FOR THE FLOW VISUALISATION OF THE FLOW FIELDS

Andreas Ion Tabakis

In this dissertation, computational and theoretical study of fluid mechanics was performed. In the first chapter an introduction was made to the equations describing the fluid flow. Complete proofs are given for the equations of energy, momentum and the equation of continuity in conservative and non-conservative form. There is also an analysis of the importance of boundary conditions and the categorization of partial differential equations according to the physical phenomena they describe.

In the second chapter, the finite difference methods and the finite volume method were analyzed. Emphasis was placed on the description of irrotational, incompressible and inviscid flow which is described by the Laplace equation.

In the third chapter computational simulations are done. Various programs have been developed in the Python programming language to simulate the flow of irrotational, incompressible inviscid fluid flow. The first application was made based on the boundary conditions of the problem that was solved analytically in the previous chapter and the results were very satisfactory. Then flows of famous experiments in non-orthogonal geometries simulated and the results are very satisfactory. Large lattice mesh grids were created with rectangular rectangles in various orientations and sizes to be inserted into the flow. The flow had the expected results, which were compared with known experiments. Then the flow between 2 parallelograms was studied by the computer simulations. In each computer application the shapes had different sizes and distances from each other. In the last application, the flow between 4 and 5 squares in different

arrangements was studied. Based on the previous simulations and the results we can know that the simulations in street canyons are correct.

Finally, in the fifth chapter we study the flow of pollutants through street canyons. This study was based on “CFD MODELLING OF AIR POLLUTION MOTION INSIDE A BUILDING BLOCK”, which was published by members of fluids mechanics laboratory, Mechanical Engineering and Aeronautics, University of Patras. In this analysis we studied, the flow of CO_2, CH_4, NO_2 pollutants for different speeds was studied, using the commercial package Fluent.

Key Words

Computational Fluid Dynamics, Pollutants flow, Numerical Methods, Finite difference method, Laplace equation

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- Τελεστής συνήθης διαφόρισης : $\frac{d}{dr}$ όπου $r = x, y, z, t$
- Τελεστής μερικής διαφόρισης: $\frac{\partial}{\partial r} = \partial_r$ όπου $r = x, y, z, t$
- Τελεστής ανάδελτα: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\ \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{z}$
- Τελεστής Laplace:$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- Τελεστής ολοκληρωσης σε καμπύλη $\int_c \ dl$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστή καμπύλη $\oint_c \ dl$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε επιφάνεια: $\iint_s \ dS$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστή επιφάνεια: $\oiint_s \ dS$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε όγκο: $\iiint_V \ dV$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστό όγκο: $\oiiint_V \ dV$
- Συμβολισμός $O(x^n)$: Οροι τάξης μεγαλύτεροι του n

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ευχαριστώ το εργαστήριο μηχανικής ρευστών για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως υπολογιστική ρευστοδυναμική ορίζουμε την ανάλυση συστημάτων που περιλαμβάνουν ροή ρευστών, μεταφορά θερμότητας και σχετιζόμενα φαινόμενα όπως οι χημικές αντιδράσεις με την χρήση υπολογιστικών προσομοιώσεων. Η υπολογιστική ρευστοδυναμική καλύπτει ένα πολύ μεγάλο εύρος βιομηχανικών και μη εφαρμογών. Μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- Αεροδυναμική αεροσκαφών και οχημάτων
- Υδροδυναμική πλοίων
- Ροή καυσίμων σε κινητήρες εσωτερικής καύσης
- Χημικές αντιδράσεις όπως ανάμειξη και διαχωρισμός
- Ωκεανογραφία
- Μετερεολογία
- Ιατρική: Μελέτη ροής του αίματος σε αρτηρίες και φλέβες
- Ρευστοδυναμική για την μελέτη αστέρων
- Γεωφυσική

[1]

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την ροή ρευστών και το υπολογιστικό μέρος θα αναπτυχθεί με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού python. [2]

1.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην υπολογιστική ρευστοδυναμική χρησιμοποιούμε αριθμητικούς αλγόριθμους για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αυτοί οι αλγόριθμοι κωδικοποιούνται σε μια γλώσσα προγραμματισμού και αποτελούνται από 3 βασικά στοιχεία:

1. Προ-επεξεργασία
2. Επίλυση
3. Μετά-επεξεργασία

Προ επεξεργασία: Κατά την προ επεξεργασία ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Καθορίζεται ο υπολογιστικός χώρος, δηλαδή η γεωμετρία της περιοχής που μας ενδιαφέρει. Στην υπόλοιπη εργασία αυτό το βήμα θα αναφέρεται σαν Γεωμετρία του προβλήματος.
- Δημιουργείται η πλεγματική διάταξη, δηλαδή η γεωμετρία του προβλήματος διακριτοποιείται σε κόμβους.
- Επιλέγονται τα φυσικά φαινόμενα που θα μοντελοποιηθούν.
- Εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες στη γεωμετρία του προβλήματος.

Επίλυση: Κατά την επίλυση εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος της επιλογής μας ή η κατάλληλη για το πρόβλημα. Η λύση του προβλήματος ορίζεται σε κάθε κόμβο και η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων που χρησιμοποιούμε στην πλεγματική διάταξη. Όσο περισσότεροι κόμβοι τόσο καλύτερη η λύση, πράγμα που σημαίνει ότι η ακρίβεια της λύσης είναι συνάρτηση της υπολογιστικής ισχύος και του χρόνου που χρησιμοποιούμε.

Μετά-επεξεργασία: Μετά την λύση του προβλήματος, πολύ σημαντική είναι η ανάλυση τον αποτελεσμάτων. Ο καλύτερος τρόπος μελέτης των αποτελεσμάτων είναι η εικονοποιήση αυτών. Συγκεκριμένα:

- Η απεικόνιση της γεωμετρίας του προβλήματος.
- Η απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών πριν την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου.

- Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων, όπως οι τιμές των πεδίων ή οι ροϊκές γραμμές του πεδίου.

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας 2D και 3D γραφικές παραστάσεις, διανυσματικά γραφήματα, ισοσταθμικά γραφήματα και ζωντανά γραφήματα. Για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη matplotlib.[3][4]

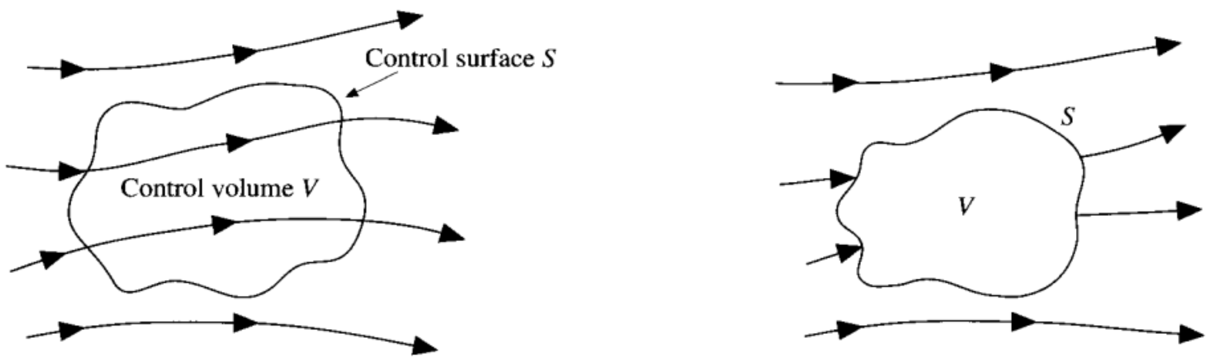
1.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΡΟΗΣ

Η βασικές εξισώσεις κίνησης ενός ρευστού εξάγονται χρησιμοποιώντας:

1. Τις θεμελιώδεις αρχές της φυσικής:
    - Διατήρηση της μάζας
    - Δεύτερος Νόμος Νεύτωνα
    - Διατήρηση της Ενέργειας
2. Τα παραπάνω εφαρμόζονται σε ένα μοντέλο ροής
3. Από την εφαρμογή εξάγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό.

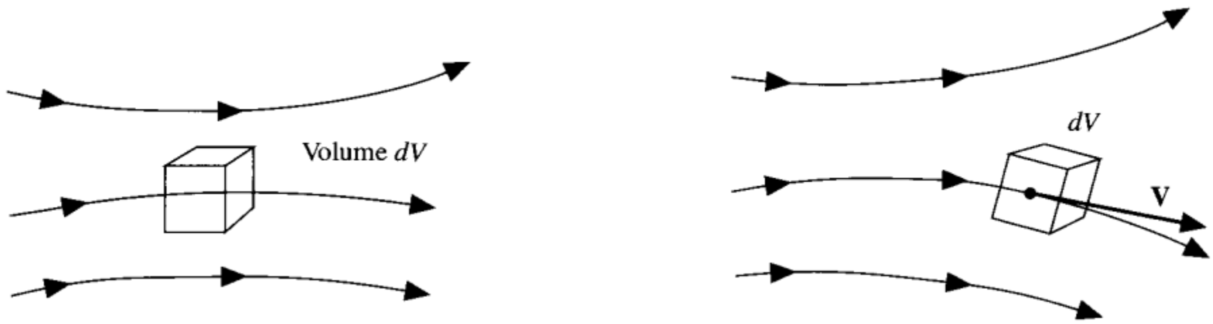
Υπάρχουν 2 μοντέλα ροής. Το μοντέλο ελέγχου πεπερασμένου όγκου και το μοντέλο απειροστού στοιχείου.

Μοντέλο πεπερασμένου όγκου ελέγχου: Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια S, που ονομάζεται επιφάνεια ελέγχου. Αυτή η επιφάνεια κλείνει έναν όγκο του ρευστού V που ονομάζεται όγκος ελέγχου. Ο όγκος ελέγχου μπορεί να είναι σταθερός ή να κινείται μαζί με τα τμήματα του ρευστού. Σε κάθε περίπτωση ο όγκος ελέγχου είναι αρκετά μεγάλος ώστε να περιέχει ένα μεγάλο τμήμα του ρευστού. Οι θεμελιώδεις αρχές εφαρμόζονται στο ρευστό που βρίσκεται μέσα σε αυτόν τον όγκο αντί να εφαρμόζονται σε ολόκληρο το ρευστό και έτσι εξάγονται οι εξισώσεις ροής του ρευστού. Αυτές οι εξισώσεις έχουν ολοκληρωτική μορφή και μπορούν να μετατραπούν σε διαφορικές εξισώσεις. Στην περίπτωση που ο όγκος είναι σταθερός και ρευστό ρέει μέσα από αυτόν, αυτές οι εξισώσεις έχουν διατηρητική μορφή, ενώ αν κινείται μαζί με το ρευστό έχουν μη διατηρητική μορφή. [5]



Σχήμα 1.1 Ογκος Ελέγχου

Μοντέλο απειροστού στοιχείου: Θεωρούμε ένα απειροστό στοιχείο ρευστού με πεπερασμένο όγκο $\mathcal{V}$. Αυτό το στοιχείο μπορεί είτε να παραμένει σταθερό και ρευστό να ρέει μέσα από αυτό είτε μπορεί να κινείται μαζί με ένα τμήμα του ρευστού με ταχύτητα **V**. Αντίστοιχα με πριν οι θεμελιώδεις αρχές της φυσικής εφαρμόζονται σε αυτό το στοιχείο και όχι σε όλο το ρευστό έτσι εξάγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την ροή του ρευστού. Αυτές οι εξισώσεις έχουν διαφορική μορφή και αν το απειροστό στοιχείο παραμένει ακίνητο είναι διατηρητικές . Αν το απειροστό στοιχείο κινείται μαζί με το ρευστό τότε οι εξισώσεις είναι μη διατηρητικές. [6]



Σχήμα 1.2 Απειροστό στοιχείο ρευστού

Συγκεκριμένα στο μοντέλο ροής απειροστού στοιχείου, η κίνηση ενός στοιχειώδους στοιχείου του ρευστού περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\mathbf{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} \quad (1.1)$$

Όπου οι συνιστώσες x, y και z της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$u = u(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (1.4)$$

Και η πυκνότητα δίνεται από την σχέση

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (1.5)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα σε ένα σημείο (x_1, y_1, z_1) μια χρονική στιγμή t_1 είναι $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1)$ και σε μια ύστερη χρονική στιγμή t_2 το απειροστό στοιχείο βρίσκεται στο σημείο (x_2, y_2, z_2) με πυκνότητα $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2)$, αφού η πυκνότητα είναι μια εξίσωση χωρικών και χρονικών μεταβλητών, τότε μπορούμε να την γράψουμε χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα taylor ως:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + O(\mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\iota\ \acute{o}\rho o\iota)(1.6)$$

Διαιρώντας με $t_2 - t_1$ και αγνοώντας του όρους μεγαλύτερης τάξης

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \frac{y_1 - y_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 \frac{z_1 - z_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (1.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση, στο όριο $t_1 = t_2$ περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας καθώς το ρευστό κινείται, δηλαδή τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας ενός απειροστού στοιχείου καθώς κινείται.

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}(1.8)$$

Αντίστοιχα

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u(1.9)$$

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v(1.10)$$

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w(1.11)$$

Συνοψίζοντας τις παραπάνω εξισώσεις

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}(1.12)$$

Ο όρος $\frac{D}{Dt}$ περιγράφει το ρυθμό μεταβολής ακολουθώντας ένα απειροστό σημείο και ονομάζεται ολική παράγωγος, ενώ ο όρος $\frac{\partial}{\partial t}$ ονομάζεται τοπική παράγωγος, που είναι ο ρυθμός μεταβολής σε ένα σταθερό σημείο και ο όρος $u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \; = \; \mathbf{V} \cdot \nabla$ ονομάζεται διατηρητική παράγωγος και περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής λόγω της κίνησης ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού από ένα σημείο σε ένα άλλο.

Η κλίση της ταχύτητας είναι ένας όρος που εμφανίζεται πολύ συχνά στις εξισώσεις ρευστομηχανικής. Εστω ένας όγκος ελέγχου που κινείται μαζί με το ρευστό. Μέσα σε αυτόν τον όγκο υπάρχει σταθερή ποσότητα ρευστού οπότε η μάζα του παραμένει σταθερή και αναλλοίωτη στον χρόνο. Όμως ο όγκος $\mathcal{V}$ και η επιφάνεια ελέγχου μεταβάλλονται καθώς κινείται σε διαφορετικές περιοχές ροής, όπου υπάρχει διαφορετική πυκνότητα. Αρα ο όγκος ελέγχου και το σχήμα του, είναι ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής. Ένα απειροστό στοιχείο της επιφάνειας dS κινείται με τοπική ταχύτητα **V,** η αλλαγή του όγκου ελέγχου dV κατά την μετατόπιση της επιφάνειας dS σε χρόνο dt είναι ίση με την επιφάνεια ενός κυλίνδρου με βάση dS και ύψος $(\mathbf{V} \cdot \Delta t) \cdot \; \boldsymbol{n}$ όπου n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια

$$d\mathcal{V} = [(\mathbf{V} \cdot \Delta t) \cdot n]dS = (V\Delta t) \cdot dS (1.13)$$

Η συνολική αύξηση όλου του όγκου ελέγχου είναι ίση με το άθροισμα της παραπάνω σχέσης πάνω στην επιφάνεια ελέγχου. Στο όριο $dS \; \to 0$ το άθροισμα γίνεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int \int_S (V\Delta t) \cdot dS (1.14)$$

Αν το παραπάνω διαιρεθεί με Δt, το αποτέλεσμα είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ελέγχου,

$$\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \frac{1}{\Delta t}\int\int_{S}(v\Delta t)\cdot dS = \int\int_{s} v\cdot dS (1.15)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης

$$\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \int\int\int_{v}(\nabla\cdot V)d\mathcal{V} (1.16)$$

Εστω ότι ο όγκος ελέγχου γίνεται απειροστά μικρός $\delta\mathcal{V}$

$$\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt} = \int\int\int_{v}(\nabla\cdot V)d\mathcal{V} (1.17)$$

$$\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt} = (\nabla\cdot V)\delta\mathcal{V} (1.18)$$

$$\nabla\cdot V = \frac{1}{\delta\mathcal{V}}\frac{\mathrm{D}(\delta\mathcal{V})}{Dt} (1.19)$$

Από την παραπάνω σχέση καταλαβαίνουμε ότι η φυσική έννοια του $\nabla\cdot V$ είναι ο ρυθμός μεταβολής όγκου του κινούμενου στοιχείου ρευστού ανά μονάδα όγκου.

1.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Η βασική αρχή που θα χρησιμοποιηθεί είναι η διατήρηση της μάζας. Σαν μοντέλο ροής θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο ελέγχου πεπερασμένου όγκου σε σταθερό σημείο. Η διατήρηση της μάζας μας λέει ότι η ροή μάζας που βγαίνει έξω από τον όγκο ελέγχου μέσα από μια επιφάνεια S είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου. Η ροή μάζας μέσα από την επιφάνεια dS είναι

$$\rho V\cdot dS (1.20)$$

Σαν σύμβαση θα θεωρήσουμε ότι το κάθετο διάνυσμα dS έχει πάντα φόρα έξω από την επιφάνεια. Αν η ποσότητα $\rho V \cdot dS$ είναι θετική υπάρχει ροή μάζας προς τα έξω, ενώ αν είναι αρνητική, ροή μάζας προς τα μέσα. Η συνολική μάζα που βγαίνει προς τα έξω δίνεται από την σχέση

$$\int\int_S \rho V \cdot dS (1.21)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\int\int\int_V \nabla \cdot (\rho V) d\mathcal{V} = \int\int_S \rho V \cdot dS$$

Η συνολική μάζα μέσα στον όγκο ελέγχου δίνεται από την σχέση

$$\int\int\int_V \rho d\mathcal{V} (1.22)$$

και ο ρυθμός μεταβολής από την σχέση

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V \rho d\mathcal{V} (1.23)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις

$$\int\int\int_V \nabla \cdot (\rho V) d\mathcal{V} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V \rho d\mathcal{V} (1.24)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0} (1.25)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση της συνέχειας. Επειδή ο όγκος ελέγχου παραμένει σταθερός η παραπάνω εξίσωση είναι διατηρητική.

Εστω το μοντέλο απειροστού στοιχείου που κινείται μαζί με την ροή. Το απειροστό στοιχείο ρευστού έχει σταθερή μάζα δm, αλλά το σχήμα του και ο όγκος $\delta\mathcal{V}$ του μπορούν να μεταβληθούν κατά την κίνηση του.

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = 0 \quad (1.26)$$

Αντικαθιστώντας $\delta m = \rho\delta\mathcal{V}$

$$\frac{\mathrm{D}(\rho\delta\mathcal{V})}{Dt} = \delta\mathcal{V}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left[\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt}\right] = 0 \quad (1.27)$$

Και αντικαθιστούμε την εξίσωση (1.19)

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot v = 0}(1.29)$$

Αυτή είναι η μη διατηρητική διαφορική μορφή της εξίσωσης συνέχειας.

Χρησιμοποιώντας τα μοντέλα ροής προκύπτουν 4 εξισώσεις που περιγράφουν την συνέχεια, 2 διατηρητικές και 2 μη διατηρητικές. Στην κάθε περίπτωση η μια είναι ολοκληρωτική και η άλλη διαφορική. Αυτές οι εξισώσεις δεν είναι διαφορετικές, αλλά διαφορετικές μορφές της ίδιας εξίσωσης. [7]

1.4 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Σε αυτή την περίπτωση περιοριζόμαστε στο μοντέλο απειροστού στοιχείου του ρευστού που κινείται. Σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μια απειροστή μάζα και θα ασχοληθούμε, προς το παρόν, μόνο με τον άξονα x.

$$F_x = ma_x (1.30)$$

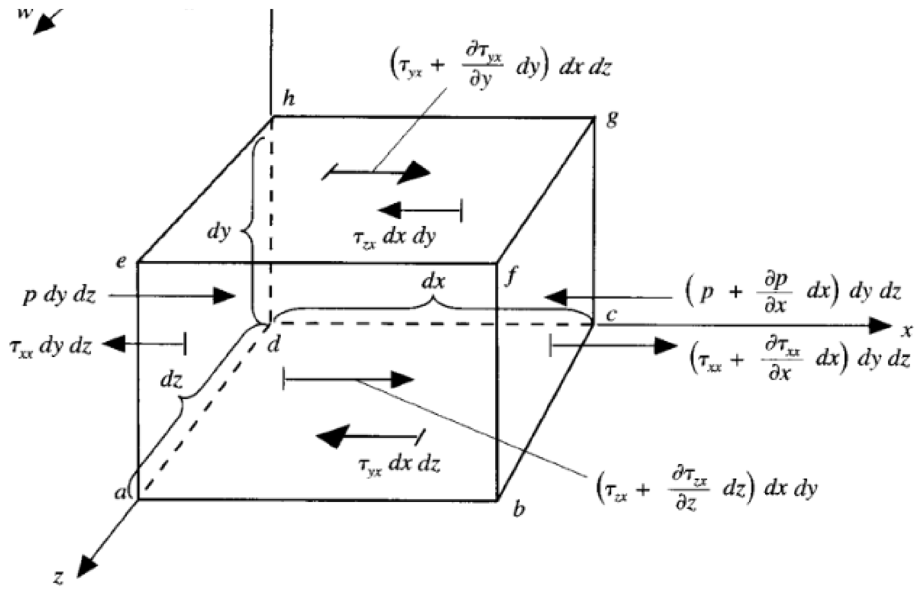
Υπάρχουν 2 είδη δυνάμεων που μελετάμε, οι δυνάμεις σώματος και οι δυνάμεις επιφάνειας.

- Δυνάμεις Σώματος: Είναι οι δυνάμεις που ασκούνται απευθείας σε έναν όγκο του σώματος και είναι δυνάμεις που δρουν από απόσταση. Τέτοιες δυνάμεις είναι βαρυτικές, ηλεκτρικές και μαγνητικές.
- Δυνάμεις επιφάνειας: Είναι οι δυνάμεις που δρουν απευθείας στην επιφάνεια του ρευστού. Υπάρχουν 2 πηγές που δημιουργούν αυτές τις δυνάμεις, η κατανομή πίεσης στην επιφάνεια του ρευστού που δημιουργείται από το ρευστό που βρίσκεται γύρω από το απειροστό στοιχείο και οι δυνάμεις διάτμησης. Οι διατμητικές δυνάμεις περιγράφονται από τανυστές και χωρίζονται σε διατμητικές τάσης τ_{ij} που περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής διατμητικής παραμόρφωση ενός απειροστού τμήματος του ρευστού και κανονικές τάσης τ_{ii} που περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής του απειροστού τμήματος του ρευστού.

Οι δυνάμεις σώματος ανά μονάδα μάζας κατά τον άξονα x που ασκείται σε ένα απειροστό στοιχείο ρευστού γράφονται ως

$$\rho f_x dxdydz (1.31)$$

Οι διατμητικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στοιχείο του ρευστού φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.3 Δυνάμεις σε στοιχειώδες ρευστό

Η συνολική επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα μάζας που ασκείται κατά τον άξονα x είναι

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\right] dydz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right) - \tau_{xx}\right] dydz$$
$$+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dydz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) - \tau_{zx}\right] dxdy (1.32)$$

Η συνολική δύναμη ανά μονάδα μάζας στον άξονα x δίνεται από το άθροισμα των 2 παραπάνω

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f_x dxdydz (1.33)$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$F_x = ma_x \Rightarrow \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f_x dxdydz = \rho dxdydz \frac{Du}{Dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho f_x = \rho \frac{Du}{Dt}} (1.34)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της ορμής για ιξώδης ροή. Με την ίδια λογική η εξίσωση της ορμής για τους υπόλοιπους άξονες γράφεται ως

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] + \rho f_y = \rho \frac{Dv}{Dt}} (1.35)$$

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f_z = \rho \frac{Dw}{Dt}} (1.36)$$

Αφού αυτές οι εξισώσεις δημιουργήθηκαν με βάση το μοντέλο του στοιχειώδους ρευστού, έχουν μη διατηρητική μορφή και ονομάζονται εξισώσεις Navier Stokes. Οι εξισώσεις Navier Stokes μπορούν να γραφτούν και σε διατηρητική μορφή γράφοντας το δεξί μέλος χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ολικής παραγώγου.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho V \cdot \nabla u (1.37)$$

Ανοίγοντας την παράγωγο

$$\rho \frac{d(\rho u)}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow u \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{d(\rho u)}{dt} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} (1.39)$$

Και χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho V \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u V) - u \nabla \cdot (\rho V) (1.40)$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.37) τις εξισώσεις (1.39) και (1.40)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{d(\rho u)}{dt} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho u V) + u \nabla \cdot (\rho V) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) (1.50)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω οι εξισώσεις Navier Stokes σε διατηρητική μορφή γράφονται ως:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho u V\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right]+\rho f_x\right)=}\ (1.51)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v V)=\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho f_y}(1.52)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho w V)=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f_z}(1.51)$$

Για Νευτώνεια ρευστά οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες της κλίσης της ταχύτητας

$$\tau_{xx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\,(1.52)$$

$$\tau_{yy}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial v}{\partial x}\,(1.53)$$

$$\tau_{zz}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial w}{\partial x}\,(1.54)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\,(1.55)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right]\,(1.56)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\,(1.57)$$

Όπου μ είναι ο συντελεστής μοριακού ιξώδους και λ ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους.

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω οι εξισώσεις Navier Stokes γράφονται ως

- $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u w)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+$

$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\rho f_x(1.58)$

- $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+$
$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\rho f_y(1.59)$

- $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+$
$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\rho f_z(1.60)$

[8]

1.5 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την θεμελιώδη αρχή διατήρησης της ενέργειας στο μοντέλο του απειροστού στοιχείου ρευστού που κινείται με την ροή. Η εξίσωση της ενέργειας θα εξαχθεί υπολογίζοντας κάθε όρο από τον θεμελιώδη νόμο της θερμοδυναμικής

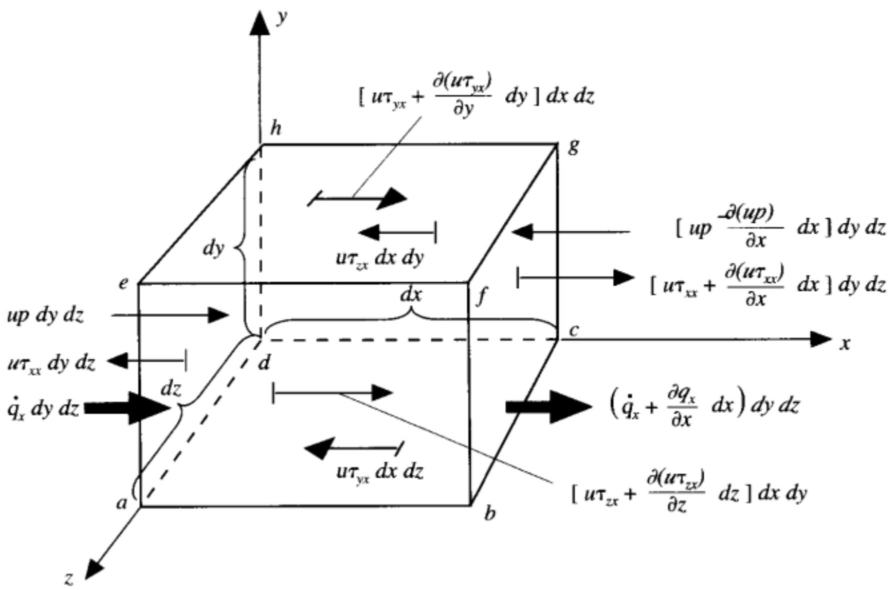
$$dU=dQ+dW(1.61)$$

όπου U, Q,W η εσωτερική ενέργεια, η θερμότητα και το έργο αντίστοιχα.

Υπολογισμός έργου: Ο ρυθμός παραγωγής έργου από δυνάμεις σώματος σε ένα απειροστό στοιχείο του ρευστού που κινείται με ταχύτητα **V** είναι:

$$\rho f\cdot V(dxdydz)(1.62)$$

Για τις δυνάμεις επιφάνειας και την θερμική αγωγιμότητα όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα έχουμε:



Σχήμα 1.4 Επιφανειακές δυνάμεις και θερμική αγωγιμότητα

Το συνολικό έργο δίνεται από την σχέση

$$dW = -\left[\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z} + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f \cdot V dxdydz (1.63)$$

Υπολογισμός Θερμότητας: Η ροή θερμότητας προέρχεται από ογκομετρική θέρμανση, όπως απορρόφηση ή εκπομπή ακτινοβολίας και από μεταφορά θερμότητας από την επιφάνεια λόγω θερμικής αγωγιμότητας (κλίση θερμοκρασίας). Ορίζοντας ως $\dot{q}$ τον ρυθμό αύξησης της ογκομετρικής θερμότητας ανά μονάδα μάζας, η ογκομετρική θερμότητα του απειροστού στοιχείου είναι

$$\rho\dot{q}dxdydz$$

Και η θέρμανση του απειροστού στοιχείου του ρευστού λόγω θερμικής αγωγιμότητας είναι

$$-\left(\frac{\partial\dot{q_x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{q_y}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{q_z}}{\partial z}\right)dxdydz(1.64)$$

Ο νόμος του Fourier για την θερμική αγωγιμότητα, μας λέει ότι είναι ανάλογή της βάθμωσης της τοπικής θερμοκρασίας

$$\dot{q_x}=-k\frac{\partial T}{\partial x}(1.65)$$

$$\dot{q_y}=-k\frac{\partial T}{\partial y}(1.66)$$

$$\dot{q_z}=-k\frac{\partial T}{\partial z}(1.67)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\boxed{dQ=\left[\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz}(1.68)$$

Εσωτερική Ενέργεια: Η εσωτερική ενέργεια προέρχεται από 2 συνεισφορές, από την ενέργεια λόγω της κίνησης των μορίων και την κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης του ρευστού.

$$dU=\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dxdydz(1.69)$$

Εξίσωση Ενέργειας

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στον θεμελιώδη νόμο της θερμοδυναμικής, βρίσκουμε την εξίσωση θερμότητας στη μη διατηρητική της μορφή :

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (1.60)$$

Για να προκύψει η διατηρητική μορφή αυτής της εξίσωσης αντικαθιστούμε:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)V\right] (1.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)V\right] =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (1.62)$$

[9]

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στα 3 παραπάνω κεφάλαια, οι εξισώσεις που διέπουν την θερμοδυναμική είναι οι

- **Διατηρητική Μορφή** :

  1. Εξίσωση Συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 (1.63)$$

2. Εξισώσεις ορμής:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho f_{\chi}} (1.64)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] + \rho f_{y}} (1.65)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f_{z}} (1.66)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας:

$$\frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)V\right] =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (1.67)$$

- **Μη διατηρητική μορφή:**

1. Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot v = 0 (1.68)$$

2. Εξισώσεις ορμής

$$\boxed{\rho\frac{\partial Du}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho f_{\chi}} (1.69)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dv}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] + \rho f_y} \quad (1.70)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dw}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f_z} \quad (1.71)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (1.72)$$

Μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει τους όρους διατηρητική και μη διατηρητική χωρίς να τους εξηγήσουμε. Ο διαχωρισμός σε διατηρητικές και μη διατηρητικές εξισώσεις έχει να κάνει με το υπολογιστικό μέρος της ρευστομηχανικής και όχι με το θεωρητικό. Οι διατηρητικές μορφές των εξισώσεων προσφέρουν μια ευκολία σε ένα υπολογιστικό σύστημα αφού, όλες οι εξισώσεις σε διατηρητική μορφή μπορούν να εκφραστούν από την ίδια εξίσωση. Κάτι που βοηθάει στο να απλοποιήσουμε και να οργανώσουμε την λογική που θέλουμε να δώσουμε σε ένα υπολογιστικό πρόγραμμα. Παρατηρούμε ότι όλες οι εξισώσεις στην διατηρητική μορφή τους περιέχουν το θεώρημα της απόκλισης, αυτοί οι όροι περιέχουν την ροή μια ποσότητας.

- Ροή μάζας ρV
- Ροή ορμής κατά τον άξονα x $\rho u V$

- Ροή ορμής κατά τον άξονα y $\rho u V$
- Ροή ορμής κατά τον άξονα z $\rho u V$
- Ροή εσωτερικής ενέργειας $\rho e V$
- Ροή συνολικής ενέργειας $\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V$

Παρατηρώντας όλες τις διατηρητικές εξισώσεις βλέπουμε ότι μπορούμε να τις γράψουμε σαν μια εξίσωση ως

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=J \quad (1.73)$$

Όπου

$$U=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right)(1.74)$$

$$F=\left(\rho u,\rho u^2+p+\tau_{xx},\rho v u-\tau_{xy},\rho w u-\tau_{xz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)u+pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}\right.$$
$$\left.-w\tau_{xz}\right)(1.75)$$

$$G=\left(\rho v,\rho u v-\tau_{yx},\rho v^2+p-\tau_{yy},\rho w v-\tau_{yz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)u+pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\tau_{yz}-v\tau_{yy}\right.$$
$$\left.-w\tau_{yz}\right)(1.76)$$

$$H=\left(\rho w,\rho u w-\tau_{zx},\rho v w-\tau_{zy},\rho w^2+p\tau_{zz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)w+pw-k\frac{\partial T}{\partial z}-u\tau_{zx}-v\tau_{zy}\right.$$
$$\left.-w\tau_{zz}\right)(1.77)$$

$$J=\left(0,\rho f_x,\rho f_y,\rho f_z,\rho\left(uf_x+vf_y+wf_z\right)+\rho\dot{q}\right)(1.78)$$

Οι όροι F, G, H ονομάζονται όροι παροχής και το J όρος πηγής, όπου είναι μηδέν αν οι δυνάμεις σώματος και η ογκομετρική θέρμανση είναι αμελητέες. [10]

1.6 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν πλήρως την ροή ρευστών. Αυτές οι εξισώσεις είναι ίδιες είτε μελετάμε την ροή σε ένα αεροπλάνο, σε ένα σκάφος, υπερηχητική ή υποηχητική, με ιξώδες ή χωρίς κτλ. Η διαφορά προκύπτει από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα. Οι εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας είναι διαφορικές εξισώσεις άρα η ειδική λύση τους, δηλαδή η λύση του πραγματικού προβλήματος που μας ενδιαφέρει, εξαρτάται από τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται με βάση φυσικές υποθέσεις που μπορούν να γίνουν στα σύνορα του προβλήματος, μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- Αν έχουμε ιξώδη ροή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στρώματα του ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με την επιφάνεια έχουν σχετική ταχύτητα ως προς την επιφάνεια μηδέν.
- Αν τα τοιχώματα στα οποία βρίσκεται το ρευστό έχουν θερμοκρασία T τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το στρώμα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με αυτά έχει την ίδια θερμοκρασία.

- Αν η θερμοκρασία του ρευστού αλλάζει στα σύνορα της επιφάνειας τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και η θερμοκρασία του στρώματος του ρευστού που είναι σε επαφή με αυτή αλλάζει με τον ίδια τρόπο.
- Για ροή χωρίς ιξώδες η ταχύτητα του ρευστού στα τοιχώματα μπορεί να θεωρηθεί πεπερασμένη.

Στην υπολογιστική ρευστομηχανική πρέπει να γίνεται σωστή εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών ώστε τα αποτελέσματα μια προσομοίωσης να πλησιάζουν την πραγματικότητα. [11],[12]

1.7 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να είναι πολύ διαφορετική ανάλογα με την περιοχή και με τις συνθήκες που λύνεται. Από το προηγούμενο κεφάλαιο παρατηρούμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ρευστών είναι γραμμικές και πολλαπλασιασμένες με σταθερούς συντελεστές, τέτοια συστήματα ονομάζονται οιονεί στατικά. Όπως φαίνεται για ροή χωρίς ιξώδες οι εξισώσεις είναι πρώτης τάξης και γραμμικές, ενώ για ροή με ιξώδες οι διαφορικές εξισώσεις είναι δεύτερης τάξης και γραμμικές. Οι οιονεί μερικές διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται σε 3 κατηγορίες

- Υπερβολικές
- Παραβολικές

- Ελλειπτικές

[13]

Κάθε ένα είδος από τις παραπάνω έχει μια διαφορετική μαθηματική συμπεριφορά, άρα περιγράφει και ένα διαφορετικό φυσικό φαινόμενο. Μια μερική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται με τον εξής τρόπο, στην πιο γενική περίπτωση που είναι δεύτερης τάξης

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+b(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x^2}+c(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+d(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+d(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}$$
$$+f(x_1,x_2)u=g(x_1,x_2)\quad(1.79)$$

Ορίζουμε την ποσότητα $\Delta\ =\ b^2-4ac$, αν :

- Δ= 0 η διαφορική ονομάζεται παραβολική
- Δ< 0 η διαφορική ονομάζεται ελλειπτική
- Δ> 0 η διαφορική ονομάζεται υπερβολική

Υπερβολικές εξισώσεις:

Χρησιμοποιώντας υπερβολικές εξισώσεις περιγράφουμε σταθερή υπερηχητική ροή χωρίς ιξώδες και ασταθής ροή χωρίς ιξώδες.

- **Σταθερή υπερηχητική ροή χωρίς ιξώδες:** Περιγράφεται από τις σταθερές εξισώσεις Euler όπου η ροή είναι υπερηχητική παντού. Ένα παράδειγμα τέτοιας ροής είναι η σταθερή υπερηχητική ροή γύρω από ένα airfoil.
- **Ασταθής ροή χωρίς ιξώδες:** Περιγράφονται από τις εξισώσεις Euler για ασταθή ροή ανεξάρτητα με το αν η ροή είναι υπερηχητική ή όχι. Μερικά παραδείγματα τέτοια ροής είναι η μονοδιάστατη κίνηση κύματος σε έναν αγωγό και η δισδιάστατη κίνηση γύρω από ένα airfoil.

Παραβολικές εξισώσεις:

Χρησιμοποιώντας παραβολικές εξισώσεις μπορούμε να περιγράψουμε ροή με σταθερά στρώματα, παραβολική ιξώδης ροή και ασταθής θερμική αγωγιμότητα.

- **Ροή με σταθερά στρώματα:** Σε αυτή την προσέγγιση χωρίζουμε το ρευστό σε 2 περιοχές. Ένα λεπτό στρώμα, που ονομάζεται συνοριακό στρώμα, βρίσκεται κοντά στην συνοριακή επιφάνεια, όπου εκεί μελετώνται τα φαινόμενα τριβής και όλο το υπόλοιπο ρευστό θεωρείται ότι ρέει χωρίς ιξώδες. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το συνοριακό στρώμα είναι παραβολικές.
- **Παραβολική ιξώδης ροή:** Σε αυτή την προσέγγιση θεωρούμε ότι το συνοριακό στρώμα που περιέχει τα φαινόμενα με ιξώδες είναι πεπερασμένο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η υπερηχητική ροή γύρω από μυτερό σώμα.
- **Ασταθής θερμική αγωγιμότητα:** Εστω ένα σταθερό ρευστό που η θερμότητα μεταφέρεται μέσω θερμικής αγωγιμότητας. Επίσης θεωρούμε ότι η κλίση της θερμότητας αλλάζει σαν συνάρτηση με τον χρόνο, δηλαδή η τιμή της θερμοκρασίας στα τοιχώματα είναι χρονοεξαρτώμενη. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την θερμότητα είναι χρονοεξαρτημένες.

Ελλειπτικές Εξισώσεις: Η πληροφορία που μεταφέρουν οι ελλειπτικές εξισώσεις διαδίδεται στον χώρο και η λύση τους σε μια περιοχή εξαρτάται μόνο από τις τιμές στα σύνορα. Αν καθορίζονται οι τιμές της λύσης στα σύνορα οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται Dirichlet, αν καθορίζονται οι τιμές της παραγώγου της λύσης στα σύνορα ονομάζονται Newmann και αν είναι μικτές Robin.

Χρησιμοποιώντας ελλειπτικές εξισώσεις μπορούμε να περιγράψουμε σταθερή, υποηχητική ροή χωρίς ιξώδες και ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες.

- **Σταθερή, υποηχητική ροή χωρίς ιξώδες:** Το βασικό σημείο αυτής της προσέγγισης είναι ότι η ροή είναι υποηχητική. Στην υποηχητική ροή οι ροϊκές γραμμές ανοίγουν πριν πλησιάσουν το σώμα και κλείνουν αφού το περάσουν.
- **Ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες:** Η ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες είναι μια οριακή περίπτωση της υποηχητικής ροής καθώς ο αριθμός Mach, ο οποίος ορίζεται ως ταχύτητα του σώματος/ ταχύτητα του ήχου, τείνει στο μηδέν.

Συνοψίζοντας οι 3 κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με την φυσική σημασία τους ονομάζονται:

- Ελλειπτικές= Κυματικές εξισώσεις αφού περιγράφουν φαινόμενα διάδοσης .
- Παραβολικές = Εξισώσεις θερμότητας αφού περιγράφουν φαινόμενα που σχετίζονται με την διάδοση της θερμότητας.
- Υπερβολικές= Εξισώσεις Laplace, περιγράφουν φαινόμενα που οι λύση τους εξαρτάται μόνο από την τιμή στα σύνορα.

[14], [15]

2.0 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βασική αρχή κάθε αριθμητικής μεθόδου είναι το μοντέλο που χρησιμοποιείται, δηλαδή μια διαφορική εξίσωση και κάποιες συνοριακές συνθήκες ανάλογα με την εφαρμογή που θέλουμε να γίνει. Το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να εξαρτάται από το είδος της ροής και από τις διαστάσεις του προβλήματος. Μετά από την επιλογή του μοντέλου επιλέγουμε την μέθοδο διακριτοποιήσης. Δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσουμε μια διαφορική εξίσωση με αλγεβρικές εξισώσεις διαφορών. Υπάρχουν πολλοί τρόποι διακριτοποίησης, μερικοί από τους πιο γνωστούς είναι:

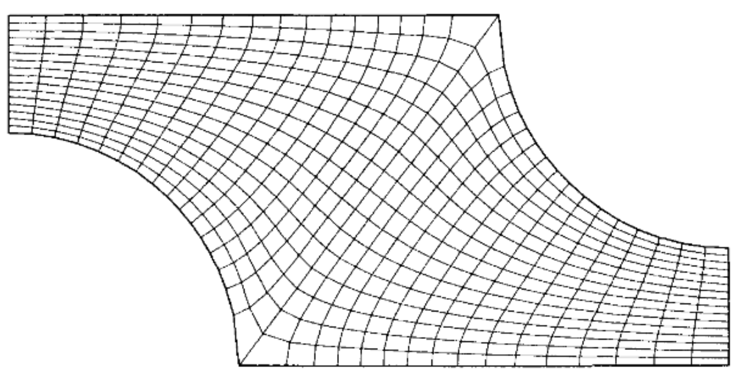
- Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Η μέθοδος πεπερασμένου όγκου
- Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Κάθε μέθοδος όταν εφαρμοστεί σωστά θα πρέπει να δίνει σωστά αποτελέσματα, αλλά ανάλογα το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε κάποιες μπορεί να είναι προτιμητέες.

Κατά την διακριτοποίηση επιλέγονται διακριτά σημεία στα οποία υπολογίζεται η λύση. Το σύνολο αυτών των σημείων ονομάζεται πλεγματική διάταξη (grid) και χωρίζει τον χώρο σε πολλούς υπόχωρους (διακριτά σημεία, διακριτοί όγκοι, διακριτά στοιχεία κτλ). Η μορφή της πλεγματικής διάταξης έχει μεγάλη σημασία κατά τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Μερικές μορφές πλεγματικής διάταξης είναι οι εξής:

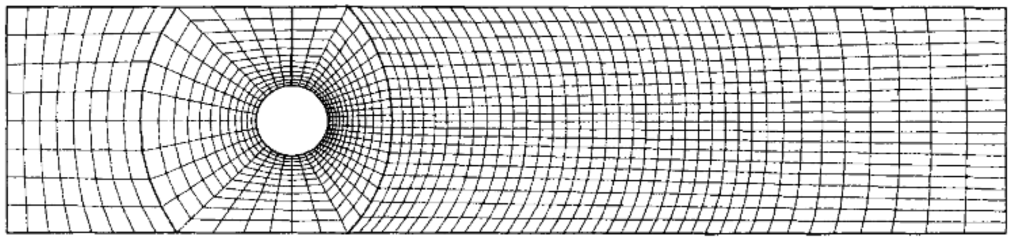
- **Δομημένη πλεγματική διάταξη**: Η κανονική ή αλλιώς δομημένη πλεγματική διάταξη περιέχει ένα σύνολο από πλεγματικές γραμμές που συνδυάζονται κατάλληλα ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Κάθε σημείο στον χώρο προσδιορίζεται από κάποιους δείκτες ανάλογα με τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Η απλή συνδεσμολογία των σημείων με τα γειτονικά τους προσφέρει απλότητα στον προγραμματισμό των προβλημάτων, από την άλλη η μεγάλη απλότητα της διάταξης δεν αφήνει πολλά περιθώρια για την επίλυση δύσκολών προβλημάτων σε περίεργες γεωμετρίες. Τα δομημένα πλέγματα χωρίζονται σε γνωστές κατηγορίες H, O και C ανάλογα με το είδος σύνδεσης των πλεγματικών γραμμών.

    1. **Τύπος H**: περιέχει πλεγματική διάταξη που αν απεικονιστεί σε ένα ορθογώνιο όλα τα γειτονικά σημεία ισαπέχουν.



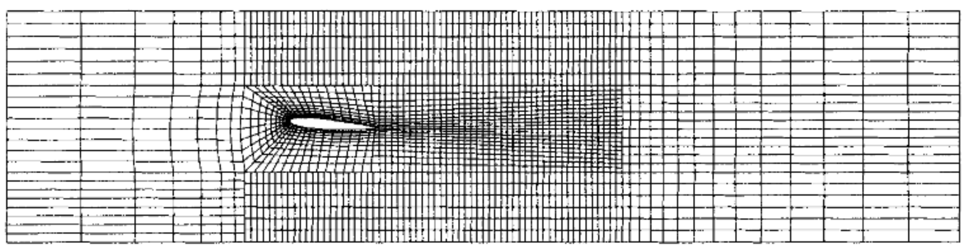
Σχήμα 2.1 H πλεγματική διάταξη

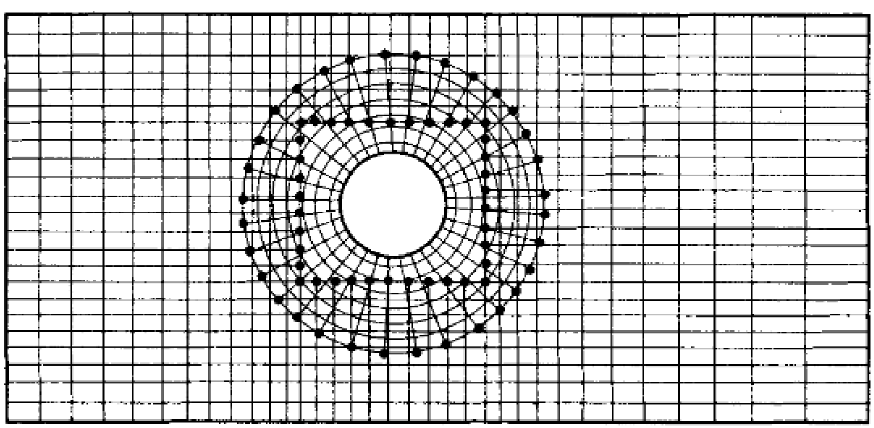
    2. **Τύπος O:** O τύπος O περιγράφει μια πλεγματική διάταξη γύρω από ένα κύλινδρο



Σχήμα 2.2 Ο πλεγματική διάταξη

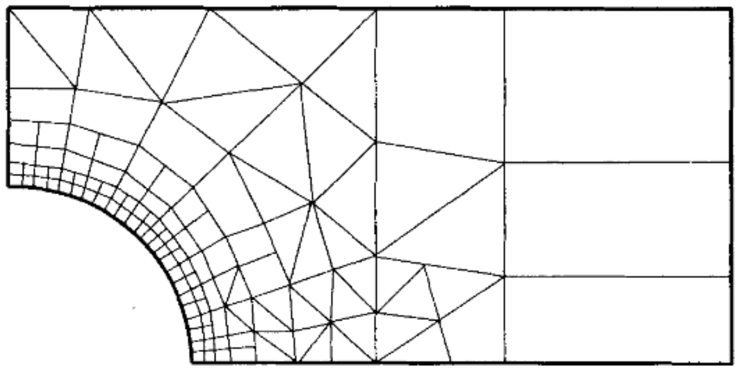
3. **Τύπος C:** Ο τύπος C είναι οι πλεγματικές διατάξεις που έχουν διαφορετικές αποστάσεις τα πλεγματικά σημεία ανάλογα με την περιοχή που βρίσκονται.





Σχήματα 2.3-2.4 C πλεγματική διάταξη

- **Μη δομημένη πλεγματική διάταξη:** Αυτό ο τρόπος διακριτοποίησης εφαρμόζεται σε δύσκολες γεωμετρίες και συνήθως εφαρμόζονται στις μεθόδους πεπερασμένου όγκου και πεπερασμένων στοιχείων. Συνήθως τα πλέγματα δημιουργούν τρίγωνα στις 2 διαστάσεις και τετράεδρα στις 3.



Σχήμα 2.5 Μη δομημένη πλεγματική διάταξη

Αφού γίνει η επιλογή της πλεγματικής διάταξης, πρέπει να γίνει η επιλογή των προσεγγίσεων που θα γίνουν κατά την διαδικασία διακριτοποίησης. Αν χρησιμοποιήσουμε τις πεπερασμένες διαφορές πρέπει να γίνει προσέγγιση των παραγώγων στα πλεγματικά σημεία, στην μέθοδο πεπερασμένου όγκου γίνεται επιλογή του τρόπου προσέγγισης επιφανειακών και χωρικών ολοκληρωμάτων και στην μέθοδο πεπερασμένου στοιχείου γίνεται επιλογή του σχήματος των στοιχείων και των συναρτήσεων βάρους.

Η διακριτοποίηση δημιουργεί ένα σύνολο εξισώσεων οπότε θα πρέπει να γίνει επιλογή της μεθόδου που θα λυθούν όλες αυτές, η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από το είδος του προβλήματος και την πλεγματική διάταξη. Τέλος, αφού επιλέξουμε τα κατάλληλα εργαλεία από όλα τα παραπάνω πρέπει να ελέγξουμε το πότε η λύση μας είναι σωστή. Δηλαδή το πότε υπάρχει σύγκλιση.

[16], [17]

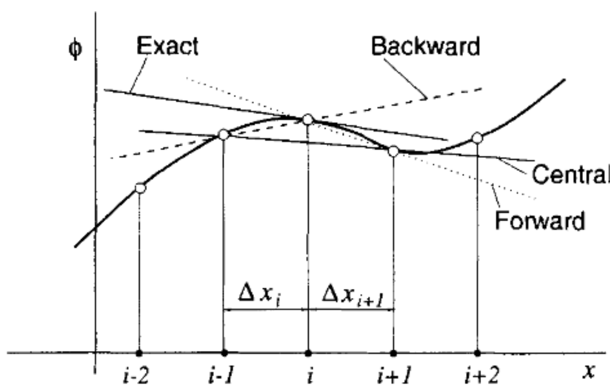
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η βασική ιδέα για την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας του προβλήματος. Η διακριτοποίηση συνήθως έχει τοπική δομή, δηλαδή δημιουργείται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ακολουθεί την μορφή του. Αυτό σημαίνει ότι 2 πλεγματικές γραμμές ανήκουν σε διαφορετικές οικογένειας καμπυλών $\xi_1 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}, \xi_2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ και τέμνονται μόνο μια φορά σε κάθε πλεγματικό σημείο.

Η ιδέα των πεπερασμένων διαφορών βασίζεται στον ορισμό της παραγώγου:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i+\Delta x)-\phi(x_i)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Όπου η γεωμετρική απεικόνιση της παραγώγου είναι η εφαπτόμενη της καμπύλης σε ένα σημείο, αυτή μπορούμε να την προσεγγίσουμε με διαφορετικούς τρόπους, είτε προδρομικά $x_i + \Delta x$, είτε οπισθοδρομικά $x_i - \Delta x$,είτε κεντρικά



Σχήμα 2.6 Προσέγγιση πρώτης παραγώγου

Για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor [18]. Εστω μια συνάρτηση φ(x), το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης γύρω από σημείο x_i γράφεται ως

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$+ \cdots \ldots . . + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.2)$$

Αντικαθιστώντας το x με x_{i+1} ή με x_{i-1} στην παραπάνω έκφραση, δημιουργούμε εκφράσεις για τις τιμές του φ στο σημείο i, χρησιμοποιώντας τιμές γύρω από αυτή.

Συγκεκριμένα για x_{i+1}:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.3)$$

Και για x_{i-1}:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.4)$$

Χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα x_{i+1} και x_{i-1}:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i$$

$$- \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να προσεγγίσουμε τις παραγώγους πρώτης τάξης

- Προδρομικά (FDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}$ (2.6)
- Οπισθοδρομικά (BDS) : $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_\iota - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ (2.7)

- Κεντρικά (CDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}$ (2.8)

[19]

Οι όροι που αφαιρεθήκαν από τις παραπάνω σχέσεις ονομάζονται όροι περικοπής, αυτοί οι όροι μετράνε τις ακρίβεια της προσέγγισης και καθορίζουν τον ρυθμό με τον οποίο τα σφάλματα μειώνονται καθώς η απόσταση μεταξύ των πλεγματικών σημείων μικραίνει. Αυτοί οι όροι υπολογίζονται από την σχέση

$$e_r = (\Delta)^m a_{m+1} + (\Delta)^{m+1} a_{m+2} + \cdots ..(\Delta)^n a_{n+1} (2.9)$$

Όπου Δx είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων και α οι μεγαλύτερες παράγωγοι πολλαπλασιασμένες με κάποιες σταθερές. [20]

Ενας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της παραγώγου είναι η πολύ προσαρμογή. Με αυτή την μέθοδο η συνάρτηση που θέλουμε να παραγωγίσουμε προσαρμόζεται με μια καμπύλη παρεμβολής και παραγωγίζουμε τα αποτελέσματα στη νέα καμπύλη. Μερικά γνωστά παραδείγματα είναι η προσέγγιση με τμηματικές συναρτήσεις, 2 πολύ γνωστές προσεγγίσεις αυτής της μορφής είναι η FDS και η BDS ανάλογα με το αν το δεύτερο σημείο δεξιά ή αριστερά του πρώτου. Προσαρμόζοντας μια παραβολή στα σημεία x_{i-1} , x_i και x_{i+1} υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο με παρεμβολή βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}(\Delta x_i)^2 - \phi_{i-1}(\Delta x_{i+1})^2 + \phi_i[(\Delta x_{i+1})^2 - (\Delta x_i)^2]}{\Delta x_{i+1}\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} (2.10)$$

Όπου $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ και για ομοιόμορφη κατανομή πλεγματικών σημείων αυτή μειώνεται στην προσέγγιση CDS .

Η δεύτερη παράγωγος εμφανίζεται σε όρους διάδοσης. Για να γίνει εκτίμηση της δεύτερης παραγώγου μπορούμε να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο 2 φορές. Γεωμετρικά η δεύτερη παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη που αναπαριστά την πρώτη παράγωγο. Για προσέγγιση BDS της παραγώγου στα σημεία x_{i+1} και x_i

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2(x_i - x_{i-1})} \quad (2.11)$$

Αντίστοιχα για την CDS προσέγγιση η οποία απαιτεί την πρώτη παράγωγο στα σημεία x_{i-1} και x_i, είναι καλύτερα να τα προσεγγίσουμε την μισή απόσταση:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1/2} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1/2} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (2.13)$$

Χρησιμοποιώντας τις 2 παραπάνω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1/2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1/2}}{1/2(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (2.14)$$

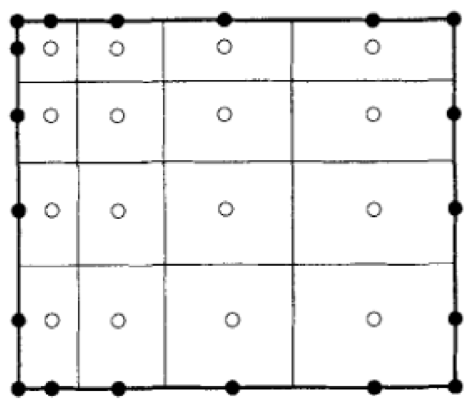
για ισαπέχουσες αποστάσεις μεταξύ πλεγματικών σημείων

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (2.15)$$

Τέλος σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ρευστών σε εξισώσεις διαφορών. [21]

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ

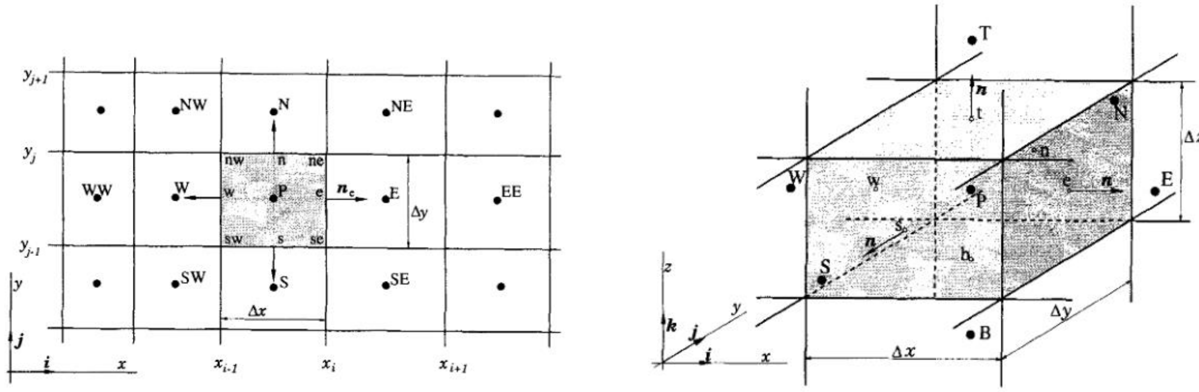
Στην μέθοδο πεπερασμένων όγκων ο χώρος λύσης χωρίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό όγκων ελέγχου από ένα πλέγμα. Στην πιο απλή περίπτωση η διακριτοποίηση γίνεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες αν και θα μπορούσε να γίνει σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Ο όγκος ελέγχου καθορίζεται από ένα πλέγμα και το υπολογιστικό σημείο βρίσκεται το κέντρου του όγκου ή σε οποιοδήποτε άλλο σημείο μέσα σε αυτόν.[22]



Σχήμα 2.7 Ογκος ελέγχου

Προσέγγιση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων:

Η επιφάνεια του όγκου ελέγχου έχει 4 πλευρές για δισδιάστατα προβλήματα και 6 πλευρές για τρισδιάστατα, η οποία θα συμβολίζονται με (E,W,N,S,T,B) ανάλογα με την θέση τους ως προς το υπολογιστικό σημείο.



Σχήμα 2.8 Επιφάνειες Ελέγχου

Η συνολική ροή μέσα από τον όγκο ελέγχου δίνεται από το άθροισμα στις 4 ή 6 πλευρές αντίστοιχα

$$\int_S f\, dS = \sum_k \int_{S_k} f\, dS \ (2.16)$$

Εστω μια πλευρά ελέγχου e, ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος απαιτεί γνώση από όλο τον όγκο ελέγχου, όμως η μόνη γνωστή τιμή αφορά το σημείο υπολογισμού. Υπάρχουν 2 επίπεδα προσέγγισης :

1. Το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως προς μεταβλητές τιμές σε περισσότερα από ένα σημεία στο «κύτταρο».
2. Οι τιμές του κυττάρου προσεγγίζονται ως προς το υπολογιστικό σημείο.

Ο πιο απλός τρόπος προσέγγισης είναι η μέση τιμή πάνω σε όλη την επιφάνεια:

$$F_e = \int_{Se} f\, dS = \overline{f_e} S_e \approx f_e S_e \ (2.17)$$

[23]

Ένας άλλος κανόνας προσέγγισης είναι ο κανόνας του τραπεζοειδούς όπου:

$$F_e = \int_{S_e} f\,dS \approx \frac{S_e}{2}(f_{ne} + f_{se})(2.18)$$

[24]

Για μεγαλύτερες προσεγγίσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Simpson

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{6}(f_{ne} + 4f_e + f_{se})(2.19)$$

[25]

Εδώ οι τιμές του ολοκληρώματος προσεγγίζονται από το κέντρο e και από 2 πλευρές ne και se

Προσέγγιση Χωρικών Ολοκληρωμάτων:

Η πιο απλή προσέγγιση είναι ο κανόνας της μέσης τιμής, όπου το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από το γινόμενο της μέσης τιμής της συνάρτησης

$$\int_{\Omega} e\,d\Omega = \bar{q}\Delta\Omega(2.20)$$

Όπου $\bar{q}$ η τιμή της συνάρτησης στο κέντρο του όγκου ελέγχου. Μια προσέγγισης μεγαλύτερης τάξης μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση της μορφής.

$$q(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2(2.21)$$

Όπου οι 9 συντελεστές υπολογίζονται προσαρμόζοντας την καμπύλη τις περιοχές (NW, W, SW, N, P, S, NE, E, SE)

$$\int_{\Omega} q\,d\Omega \approx \Delta x\Delta y\left[a_0 + \frac{a_3}{12}(\Delta)^2 + \frac{a_4}{12}(\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144}(\Delta\mathrm{x})^2(\Delta\mathrm{y})^2\right](2.22)$$

[26],[27],[28]

3.0 ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΙΞΩΔΕΣ ΡΟΗ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

Για αστρόβιλη ροή

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = 0 (3.1)$$

Και για ασυμπίεστο ρευστό, δηλαδή ρευστό με σταθερή πυκνότητα

$$\rho(x, y, z, t) = \rho (3.2)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση συνέχειας βλέπουμε ότι:

$$\nabla \cdot V = 0 (3.3)$$

Από την ανάλυση Helmholtz μπορούμε να γράψουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων αναλύεται σε ένα άθροισμα κλίσης βαθμωτού δυναμικού και στροβιλισμού ενός διανυσματικού δυναμικού

$$V = -\nabla\phi + \nabla \times A (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.1)

$$\nabla \times V = 0 (3.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = 0 (3.6)$$

Αρα

$$V = -\nabla\phi (3.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση συνέχειας καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\nabla^2\phi = 0(3.8)$$

[29],[30]

Η οποία ονομάζεται εξίσωση Laplace ή εξίσωση Poisson απουσία πηγής, που περιγράφει αστρόβιλη, ασυμπίεστη και χωρίς ιξώδες ροή. Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μερική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και αρχικές συνθήκες, μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως την κίνηση αστρόβιλων και ασυμπίεστων ρευστών. Η λύση της Laplace για συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες είναι μοναδική:

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 διαφορετικές λύσεις των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών

$\boldsymbol{V_1} = \nabla\phi_1, \boldsymbol{V_2} = \nabla\phi_2$

Έστω $f = \phi_1 - \phi_2 \Rightarrow \nabla^2 f = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0$, πολλαπλασιάζοντας με το κάθετο ως προς την επιφάνεια S, που κλείνει τον όγκο V, μοναδιαίο διάνυσμα **n**

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \nabla\phi_1 \cdot \boldsymbol{n} - \nabla\phi_2 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad (3.9)$$

Αρα

$$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{V_2} \qquad (3.10)$$

Και η λύση είναι μοναδική. [31]

3.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ LAPLACE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΧΩΡΟ

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση Laplace στις 2 διαστάσεις:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 (3.11)$$

$$\phi(x,0) = f_1(x), \qquad \phi(x,L) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le K$$

$$\phi(0,y) = g_1(y), \qquad \phi(K,y) = g_2(y), \qquad 0 \le y \le L$$

Το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών μπορείς να διαχωριστεί σε 2 διαφορετικά προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = 0, \qquad \phi(x,L) = 0, \qquad 0 \le x \le K$$

$$\phi(0,y) = g_1(y), \qquad \phi(K,y) = g_2(y), \qquad 0 \le y \le L$$

Πρόβλημα 2:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = f_1(x), \phi(x,L) = f_2(x), 0 \le x \le K$$

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(K,y) = 0, \qquad 0 \le y \le L$$

Όπου ο συνδυασμός των λύσεων των 2 παραπάνω προβλημάτων θα δώσει την λύση στο αρχικό πρόβλημα :

Επίλυση προβλήματος 1:

Ο πιο συνήθης τρόπος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών. Με αυτή την μέθοδο θεωρούμε την συνάρτηση n μεταβλητών, που θέλουμε να βρούμε, σε γινόμενο n συναρτήσεων μιας μεταβλητής:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)(3.12)$$

Και έτσι η επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης μετασχηματίζεται σε επίλυση n συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(x)}\frac{\partial^2 Y(x)}{\partial y^2} = 0$$

Πλέον οι μερικές παράγωγοι μετασχηματίζονται σε συνήθεις

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(x)}\frac{d^2 Y(x)}{dy^2} = 0$$

Για να είναι ισχύει αυτή η εξίσωση θα πρέπει:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda \Rightarrow X''(x) = \lambda X(x)$$

$$\frac{1}{Y(x)}\frac{d^2 Y(x)}{dy^2} = -\lambda \Rightarrow Y''(y) = -\lambda Y(y)$$

Για τις 2 διαφορικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ισχύει:

Επίλυση της 2ης ΣΔΕ:

Θεωρούμε την χαρακτηριστική λύση:

$$Y(y) = e^{my}$$

Αρα

$$Y'(y) = me^{my}, Y'(y) = m^2 e^{my}$$

Και αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση

$$m^2e^{my} + \lambda e^{my} = 0 \Rightarrow e^{my}(m^2 + \lambda) = 0 \Rightarrow m = \pm i\lambda$$

Άρα η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων

$$Y(y) = Ae^{i\lambda y} + Be^{-i\lambda y}$$

Αντικαθιστούμε τον τύπο του Euler:

$$e^{i\lambda y} = \cos(\lambda y) + isin(\lambda y)$$

Και η λύση μετασχηματίζεται σε

$$Y(y) = Acos(\lambda y) + B\sin(\lambda y)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = 0\,, y(L) = 0$$

Μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών η λύση για την Y(y) είναι:

$$Y(y) = Asin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Επίλυση 1ης ΣΔΕ:

Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία και θεωρούμε χαρακτηριστική λύση:

$$X(x) = e^{mx}$$

Και την αντικαθιστούμε στην ΣΔΕ:

$$m^2e^{mx} - \lambda e^{mx} = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda$$

Άρα η λύση της είναι:

$$X(x) = Ae^{\lambda \chi} + Be^{-\lambda \chi}$$

Αντικαθιστώντας

$$sinhx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

Και

$$coshx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

Η λύση της X(x) γίνεται:

$$X(x) = Acosh\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + Bsinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Αφού οι τιμές της $x \in [0, K]$ μπορούμε να γράψουμε ως:

$$X(x) = A\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K-x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + B\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)}$$

Αφου έχουμε θεωρήσει ότι η λύση της Laplace είναι γινόμενο των X(x) και Y(y) και χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης η λύση του προβλήματος είναι

$$\phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K-x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} (3.13)$$

Εφαρμόζουμε τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = g_1(y)(3.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = g_2(y)\ (3.14)$$

Και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουμε:

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy, n \in Z(3.15)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\,, n \in Z \;(3.16)$$

Επίλυση προβλήματος 1:

Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία με τα παραπάνω η λύση του δεύτερου προβλήματος είναι:

$$\phi_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{K}(L-y)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} \;(3.17)$$

Εφαρμόζουμε τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) = f_1(x) \;(3.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f_2(x) \;\; (3.19)$$

Και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουμε:

$$c_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,, n \in Z \;(3.20)$$

$$d_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)dx\,, n \in Z \;\;\; (3.21)$$

Έτσι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι το άθροισμα των επιμέρους λύσεων:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K-x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{K}(L-y)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} \quad (3.22)$$

Με τους συντελεστές a_n, b_n, c_n, d_n να υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy\,, n \in Z \quad (3.23)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy\,, n \in Z \quad (3.24)$$

$$c_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,, n \in Z \quad (3.25)$$

$$d_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) dx\,, n \in Z \quad (3.26)$$

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση Laplace μπορεί να λυθεί και σε άλλα συστήματα συντεταγμένων.

Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

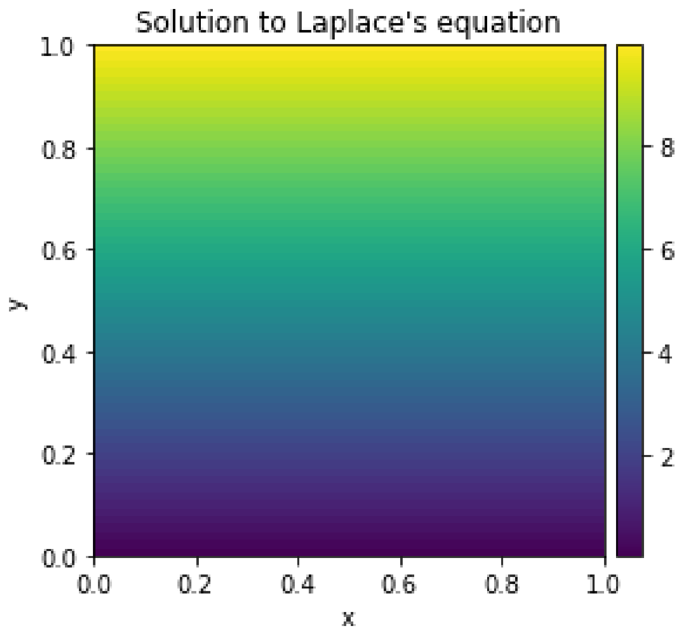
$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = 10, \qquad \phi(x,1) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\phi(0,y) = y, \qquad \phi(1,y) = y, \qquad 0 \le y \le L$$

[32]

Η λύση της εξίσωση Laplace, χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη py-pde [33] είναι:



Σχήμα 3.1 Αναλυτική λύση της Laplace με την χρήση της βιβλιοθήκης py-pde

Με αντίστοιχο τρόπο η εξίσωση Laplace μπορεί να λυθεί σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

3.3 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΡΟΪΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί τους βασικούς νόμους της ρευστομηχανικής, δηλαδή την διατήρηση της μάζας και της ορμής υποθέτοντας ότι η ροή είναι ασυμπίεστη, χωρίς ιξώδες και αστρόβιλη. Για αστρόβιλη ροή

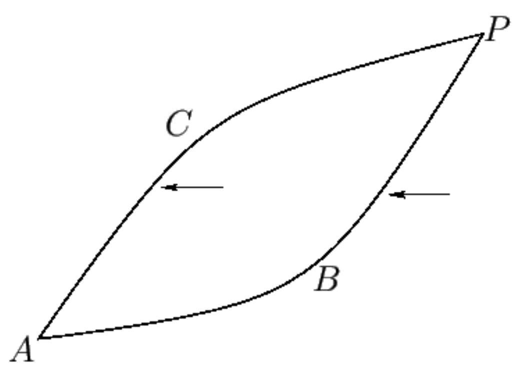
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi (3.28)$$

Για δισδιάστατα πεδία οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων είναι:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} (3.29)$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} (3.30)$$

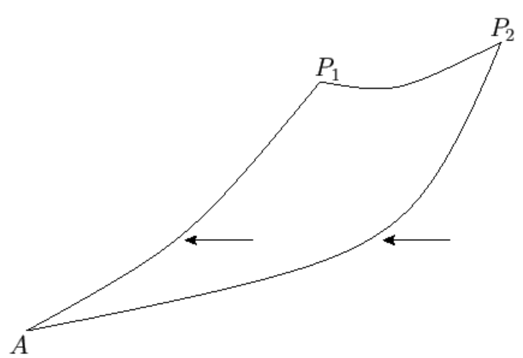
Εστω A ένα σημείο στο επίπεδο x-y, και ABP και ACP 2 καμπύλες που ενώνονται με το A σε και με σημείο P.



Σχήμα 3.2 Κλειστή επιφάνεια ACPB

Έστω ότι ρευστό δημιουργείται ή καταστρέφεται μέσα σε αυτή την κλειστή καμπύλη. Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, έχει ομοιόμορφη πυκνότητα. Η εξίσωση της συνέχειας μας λέει ότι όσο ρευστό περνάει μέσα από την δεξιά πλευρά της καμπύλης τόσο ρευστό βγαίνει και από την αριστερή πλευρά. Ο ρυθμός ροής μέσα από την επιφάνεια ονομάζεται ροή. Η ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά από την καμπύλη ABP, είναι ίση με την ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά της καμπύλης ACP. Επειδή η καμπύλη επιλέχθηκε με αυθαίρετο τρόπο, η ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά μέσα από κάθε καμπύλη που ενώνει τα A και P είναι ίση με την ροή μέσα από το ABP. Στην πραγματικότητα αφού το σημείο βάσης A έχει επιλεχθεί, η παροχή εξαρτάται μόνο από την θέση του σημείου P, και από τον χρόνο t. Με άλλα λόγια αν ορίσουμε την ροή με Ψ και αυτή εξαρτάται από την θέση του P και από τον χρόνο. Η συνάρτηση Ψ ονομάζεται ροϊκή συνάρτηση. Η ύπαρξη της ροϊκής συνάρτησης είναι άμεση συνέπεια της υπόθεσης ασυμπίεστης ροής.

Θεωρούμε 2 σημεία P_1 και P_2 μαζί με το σημείο A. Εστω Ψ_1 και Ψ_2 οι ροϊκές συναρτήσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος των καμπύλων AP_1 και AP_2. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με τα παραπάνω, η παροχή κατά μήκος του AP_2 είναι ίση με την κατά μήκος του AP_1 και του P_1 P_2.. Η παροχή στο P_1 P_2 από τα δεξιά προς τα αριστερά είναι Ψ_1 -Ψ_2. Αν τα P_1 και P_2 βρίσκονται στην ίδια ροϊκή γραμμή η ροή μεταξύ τους είναι μηδέν, γιατί η τοπική ταχύτητα είναι παράλληλη με το P_1 P_2 . Συμπεραίνουμε ότι Ψ_1=Ψ_2, δηλαδή η ροϊκή συνάρτηση είναι παντού σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Η εξίσωση των ροϊκών γραμμών είναι Ψ=c, όπου c μια σταθερά.



Σχήμα 3.3 Κλειστή καμπύλη APA

Εστω P_1 P_2 = δS ένα απειροστό τόξο της καμπύλης αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως ευθεία. Η ταχύτητα του ρευστού σε αυτό το τόξο μπορεί να αναλυθεί σε μια παράλληλη και μια κάθετη συνιστώσα. Η παράλληλη συνιστώσα δεν προσφέρει τίποτα στην παροχή κατά μήκος του τόξου από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η κάθετη συνιστώσα συνεισφέρει $V \perp \delta S$ στην παροχή. Όμως η παροχή είναι ίση με Ψ_2 -Ψ_1, άρα

$$V \perp = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\delta S} \qquad (3.31)$$

Στο όριο $\delta S \rightarrow 0$, η κάθετη ταχύτητα από τα δεξιά προς τα αριστερά κατά μήκος του dS γίνεται

$$V \perp = \frac{d\Psi}{dS} \qquad (3.32)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θεωρώντας απειροστά τόξα παράλληλα στους άξονες x και y, καταλαβαίνουμε ότι

$$V_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad (3.33)$$

$$V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (3.34)$$

Οι 2 παραπάνω εκφράσεις δίνουν

$$V = \hat{z} \times \vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}z \times \vec{\nabla}\Psi \qquad (3.35)$$

Ο παραπάνω τρόπος γραφής της ταχύτητας δείχνει κατευθείαν ότι ο περιορισμός του ασυμπίεστου ρευστού ικανοποιείται άμεσα, λόγω της ταυτότητας

$$\nabla \cdot (\nabla A \times \nabla B) = 0 \qquad (3.36)$$

Η στροβιλότητα στη δισδιάστατη ροή γράφεται ως

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{z} \qquad (3.37)$$

Όπου

$$\omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (3.38)$$

Αρα

$$\omega_z = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi \qquad (3.39)$$

Έτσι η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace [34],[35]

Μια ροϊκή γραμμή έχει την ιδιότητα να αντιστοιχεί σε γραμμές σταθερών τιμών της ροϊκής συνάρτησης Ψ=σταθερό.

Με τον ορισμό των ροϊκών γραμμών δίνεται στη ροϊκή συνάρτηση φυσική σημασία επειδή αποτελεί ένα μέτρο για την παροχή του όγκου ροής.

4.0 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΣΤΡΩΤΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΙΞΩΔΕΣ ΡΟΗ

4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2.1 η παράγωγοι που περιέχει η εξίσωση Laplace μπορούν να γραφτούν ως:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)}{\Delta x} - \frac{\phi(x,y)-\phi(x-\Delta x,y)}{\Delta x}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}\right)(4.1)$$

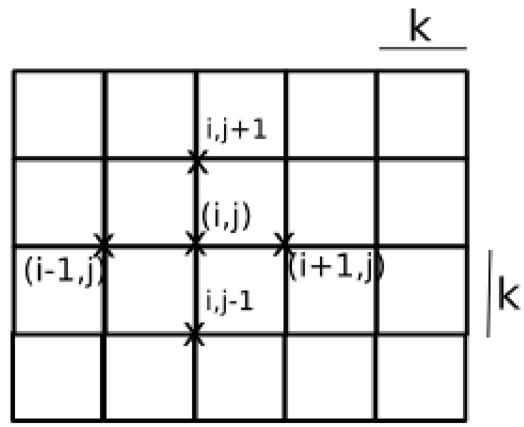
Αντίστοιχα:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2}\left(\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}\right) \qquad (4.2)$$

Αντικαθιστώντας στην μερική διαφορική εξίσωση για Δx=Δy=1 βρίσκουμε ότι:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}\right) \qquad (4.3)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η τιμή του πεδίου στο σημείο (i,j) καθορίζεται από τα γειτονικά σημεία (σχήμα 4.1).[36]



Σχήμα 4.1 Πλεγματική διάταξη για την εξίσωση Laplace

Σαν πρώτη υπολογιστική εφαρμογή δημιουργήθηκε κώδικας που λύνει το ίδιο πρόβλημα με το κεφάλαιο 1.5. Η λογική του προγράμματος είναι η εξής:

1. Για 2D πλεγματική διάταξη με n πλεγματικά σημεία στον άξονα x και m πλεγματικά σημεία στον άξονα y, δημιουργούμε έναν πίνακα διάστασης mxn με όλα στα στοιχεία πίνακα να είναι μηδενικά.
2. Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας δομές επανάληψης for.
3. Εφαρμόζουμε την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.
4. Οπτικοποιούμε τα αποτελέσματα.

Μορφή Προγράμματος:

1)u[i,j] = Μηδενικός πίνακας διάστασης (nxm)

2)Για i από 0 έως n:

u[i,0]= Κάτω συνοριακή συνθήκη

u[i,m] = Άνω συνοριακή συνθήκη

Για j από 0 έως m:

u[0,j] = Αριστερή συνοριακή συνθήκη

u[n,j] = Δεξιά συνοριακή συνθήκη

3) Για N επαναλήψεις:

Για i από 0 έως n:

Για j από 0 έως m:

u[i,j] = 0.25(u[i,j+1]+u[i,j+1]+u[i+1,j]+u[i-1,j])

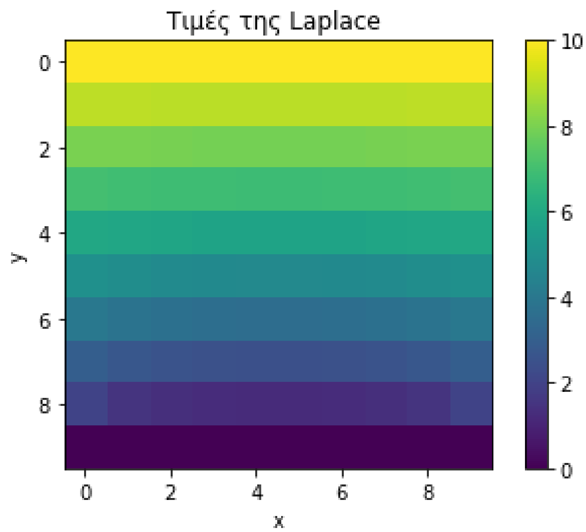
τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	9
2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8
3	7	0	0	0	0	0	0	0	0	7
4	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6
5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	4
7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 4.2 Πλεγματική διάταξη μετά την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

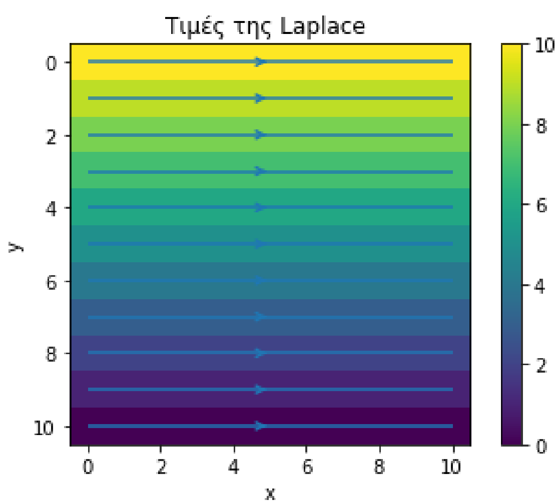
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
1	9	8.98629	8.97435	8.96562	8.96103	8.96103	8.96562	8.97435	8.98629	9
2	8	7.97081	7.9455	7.9271	7.91747	7.91747	7.9271	7.9455	7.97081	8
3	7	6.95144	6.90975	6.8798	6.86429	6.86429	6.8798	6.90975	6.95144	7
4	6	5.92522	5.86224	5.81807	5.79559	5.79559	5.81807	5.86224	5.92522	6
5	5	4.88721	4.79592	4.73465	4.70441	4.70441	4.73465	4.79592	4.88721	5
6	4	3.82769	3.69958	3.6202	3.58299	3.58299	3.6202	3.69958	3.82769	4
7	3	2.72397	2.5545	2.46358	2.42437	2.42437	2.46358	2.5545	2.72397	3
8	2	1.51371	1.33086	1.25524	1.22654	1.22654	1.25524	1.33086	1.51371	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 4.3 Πλεγματική διάταξη μετά την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών



Σχήμα 4.4 Τιμές του δυναμικού Φ σε κάθε πλεγματικό σημείο

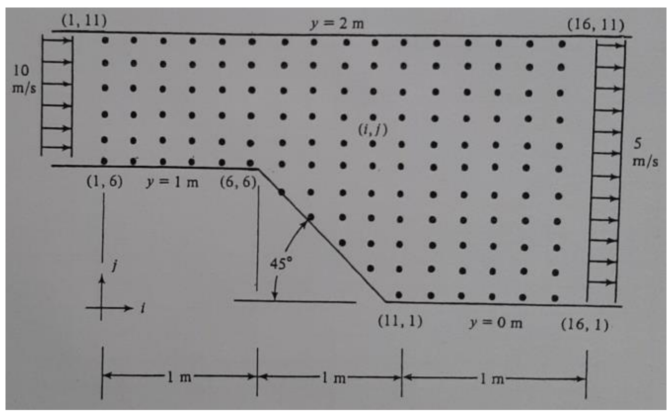
Όπως φαίνεται η τιμές του πεδίου Φ, σε κάθε σημείο προσεγγίζουμε πολύ καλά την αναλυτική λύση. Αντίστοιχα σχηματίστικάν οι ροικές γραμμές



Σχήμα 4.5 Ροικές Γραμμές

4.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΕ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στις επόμενες εφαρμογές έγινε εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών και βρέθηκε η λύση της εξίσωσης Laplace για την ροϊκή συνάρτηση σε μη ορθογώνιες γεωμετρίες. Η πλεγματική διάταξη που χρησιμοποιήσαμε είναι απλή και συνεκτική. Σαν πρώτο παράδειγμα μελετήθηκες η ροή στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 4.6) Γεωμετρία πλεγματικής δομής

Η ταχύτητα εισόδου στις παρακάτω εφαρμογές είναι ομοιόμορφη και ίση με 10m/s. Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή, η οποία ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ των τιμών της ροϊκής συνάρτησης ανάμεσα από 2 ροϊκές γραμμές. Η πλεγματική διάταξη διακριτοποιήθηκε και ορίστηκε η γεωμετρία της ως εξής:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	2
9	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1
10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 4.7 Αρχικές τιμές πλεγματικής διάταξης

Μετά από την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών οι λύσεις της Laplace για την ροϊκή συνάρτηση σε κάθε πλεγματικό σημείο φαίνονται παρακάτω:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
1	8	8.01606	8.0373	8.06982	8.12081	8.19673	8.29773	8.41077	8.52243	8.62436	8.71311	8.78849	8.85215	8.90663	8.95488	9
2	6	6.02692	6.06333	6.12119	6.21667	6.36838	6.58343	6.82293	7.05459	7.2619	7.43959	7.58872	7.71347	7.81948	7.91289	8
3	4	4.0283	4.06792	4.13492	4.25631	4.47667	4.84468	5.24292	5.61111	5.92905	6.19463	6.41331	6.59355	6.74493	6.8772	7
4	2	2.01836	2.04513	2.09426	2.19698	2.43733	3.07569	3.69297	4.21789	4.64854	4.99659	5.27633	5.50249	5.68948	5.851	6
5	0	0	0	0	0	0	1.32777	2.23538	2.91895	3.45063	3.86686	4.19293	4.4506	4.65951	4.8373	5
6	0	0	0	0	0	0	0	1.00182	1.77191	2.36817	2.82729	3.17792	3.44746	3.66064	3.83871	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0.798691	1.42286	1.89619	2.24402	2.50069	2.6969	2.85689	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.628369	1.09062	1.40126	1.61437	1.76938	1.89196	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.43666	0.656021	0.786167	0.874275	0.941558	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

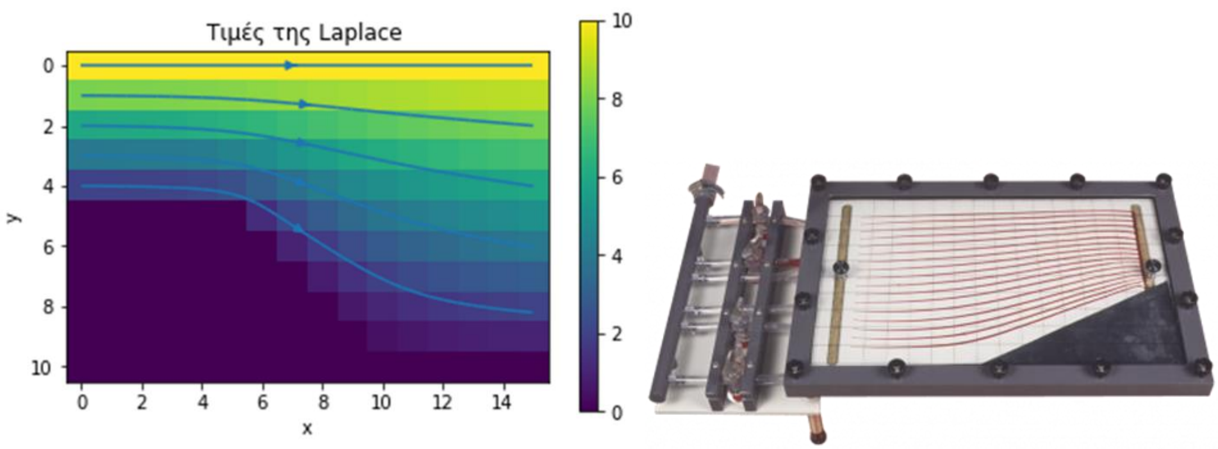
Σχήμα 4.8 a) Τιμές ροικής συνάρτησης σε κάθε πλεγματικό σημείο

Αντίστοιχα έχει κοινό γράφημα για τις τιμές του πεδίου και τις ροϊκές γραμμές. Τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά και μπορούν να συγκριθούν αποτελέσματα της ίδιας άσκησης από το βιβλίο του White [58].

ψ = 10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
8.00	8.02	8.04	8.07	8.12	8.20	8.30	8.41	8.52	8.62	8.71	8.79	8.85	8.91	8.95	9.00
6.00	6.03	6.06	6.12	6.22	6.37	6.58	6.82	7.05	7.26	7.44	7.59	7.71	7.82	7.91	8.00
4.00	4.03	4.07	4.13	4.26	4.48	4.84	5.24	5.61	5.93	6.19	6.41	6.59	6.74	6.88	7.00
2.00	2.02	2.05	2.09	2.20	2.44	3.08	3.69	4.22	4.65	5.00	5.28	5.50	5.69	5.85	6.00
ψ = 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.33	2.22	2.92	3.45	3.87	4.19	4.45	4.66	4.84	5.00
						0.00	1.00	1.77	2.37	2.83	3.18	3.45	3.66	3.84	4.00
							0.00	0.80	1.42	1.90	2.24	2.50	2.70	2.86	3.00
								0.00	0.63	1.09	1.40	1.61	1.77	1.89	2.00
									0.00	0.44	0.66	0.79	0.87	0.94	1.00
										0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

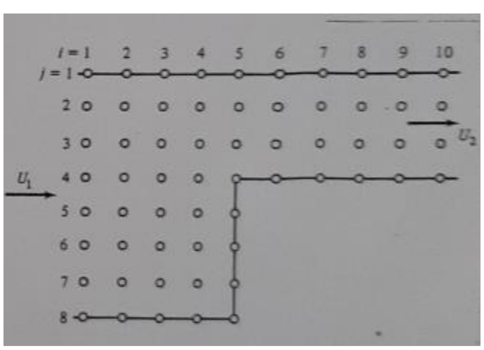
Fig. 8.36 Stream-function nodal values for the potential flow of Fig. 8.35. Boundary values are known inputs. Internal nodes are solutions to Eq. (8.110).

Σχήμα 4.8 b) Τιμές ροικής συνάρτησης σε κάθε πλεγματικό σημείο



Σχήμα 4.9 Ροικές γραμμές

Σε δεύτερη εφαρμογή έγινε προσομοίωση της ροής στην παρακάτω γεωμετρία.



Σχήμα 4.10 Πλεγματική διάταξη

Πρώτα έγινε διακριτοποίηση του χώρου και στην συνέχεια εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

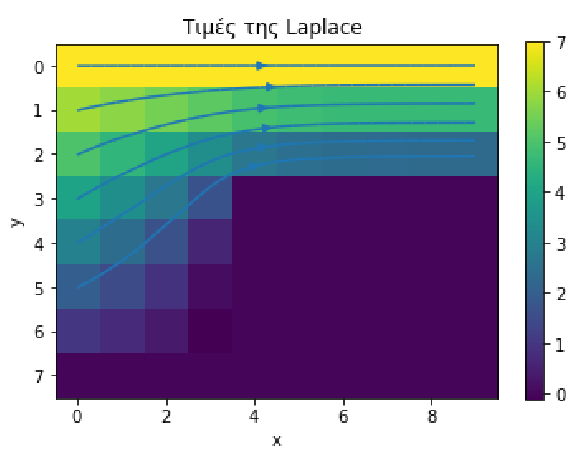
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	4.66667
2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	2.33333
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	3	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	2	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
7	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Σχήμα 4.11 Αρχικές τιμές ροικής συνάρτησης

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
1	6	5.76355	5.50177	5.20602	4.91866	4.77247	4.70897	4.68293	4.67216	4.66667
2	5	4.55242	4.0375	3.40366	2.69615	2.46227	2.38046	2.3506	2.33902	2.33333
3	4	3.40861	2.69217	1.67498	0	0	0	0	0	0
4	3	2.38986	1.64759	0.604069	0	0	0	0	0	0
5	2	1.50326	0.904245	0.0937121	0	0	0	0	0	0
6	1	0.718921	0.372425	-0.133466	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

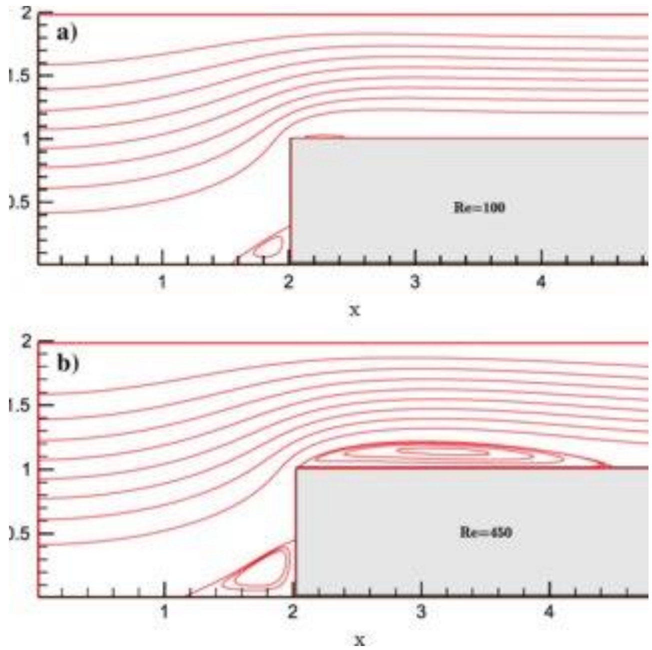
Σχήμα 4.12 Τιμές ροικής συνάρτησης

Τέλος σχεδιάστηκαν σε κοινό γράφημα οι τιμές του πεδίου και οι ροϊκές γραμμές



Σχήμα 4.13 Ροικές Γραμμές

Η παραπάνω ροή έχει την σωστή μορφή και μπορούμε να την συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα της εργασίας του L.Marino, για χαμηλούς αριθμούς Reynolds όπου εξαφανίζονται τα φαινόμενα στροβιλισμού. [61]



Σχήμα 4.14 Ροικές Γραμμές

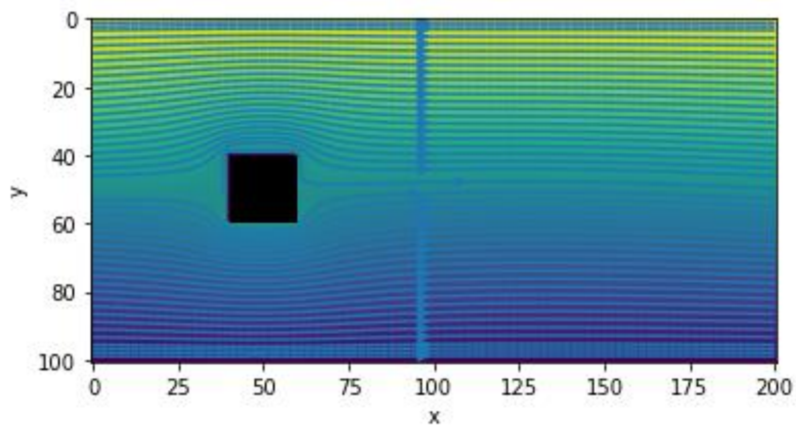
Τα αποτελέσματα και των 2 προσομοιώσεων είναι πολύ ικανοποιητικά, η ροή έχει την αναμενόμενη μορφή την οποία μπορούμε να επιβεβαιώσουμε από άλλες επιστημονικές εργασίες.

Ιδιαίτερη σημασία θα έχει στις επόμενες υπολογιστικές εφαρμογές η έννοια της παροχής. Στη μηχανική ρευστών με τον όρο παροχή εννοείται η παροχή μάζας ή παροχή όγκου. Συνηθέστερα εννοείται η παροχή όγκου, που είναι ο όγκος ρευστού που διέρχεται από τον αγωγό στη μονάδα του χρόνου $\Pi = \frac{dV}{dt} = \Psi_2 - \Psi_1$.

4.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΕΜΠΟΔΙΩΝ

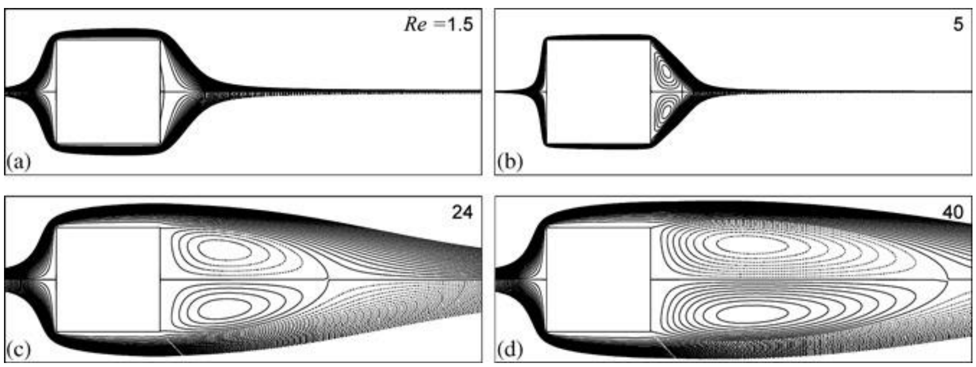
Αυτό το τμήμα της διπλωματικής κατέλαβε τον μεγαλύτερο χρόνο ενασχόλησης. Για τις υπολογιστικές εφαρμογές δημιουργήθηκαν κώδικες που προσομοιώνουν την ροή ασυμπίεστων και αστρόβιλων ρευστών γύρω από διάφορα εμπόδια. Σε όλους του κώδικες η πλεγματική διάταξη είναι συνεκτική, απλή και με διάσταση (100 x 200) και το πεδίο ταχυτήτων ομοιόμορφο με ταχύτητα V=10m/s στον άξονα x, η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη και ίση με 10 m/s σε όλο το πλάτος της εισόδου στο ροϊκό πεδίο και επειδή το πλάτος είναι 1 m τότε η παροχή είναι $10 \cdot 1 = 10\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ροϊκή συνάρτηση να έχει τιμή 0 στο κάτω τοίχωμα και 10 στο πάνω. Λόγω της μεγάλης πλεγματικής διάταξης για να συγκλίνουν τα αποτελέσματα χρειάστηκαν πολλές επαναλήψεις του αλγόριθμου.

Στην πρώτη εφαρμογή τοποθετήθηκε ένα τετράγωνο με πλάτος 20 και κέντρο το σημείο (50,50)



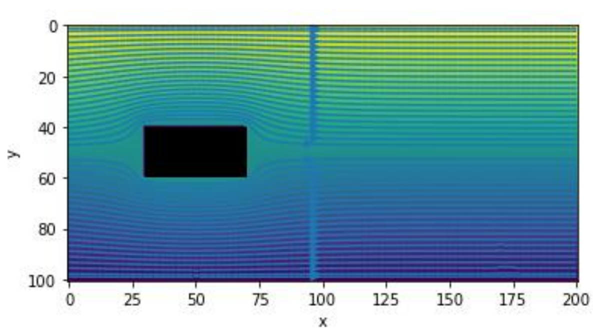
Σχήμα 4.15 α) Ροικές Γραμμές γύρω από τετράγωνο μεγέθους (20,20)

Τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά αφού βλέπουμε ότι οι ροϊκές γραμμές πρώτα αποκλίνουν πριν φτάσουν στο σχήμα και μετά συγκλίνουν αφού το περάσουν. Η παροχή χωρίζεται στη μέση, έτσι το μισό ρευστό περνάει από πάνω και το υπόλοιπο από κάτω. Πράγμα που μπορεί να υπολογιστεί από την ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο 3.3. Η παροχή θα είναι ίση με την διαφορά της ροϊκής συνάρτησης, η μισή παροχή περνάει πάνω από το σχήμα $\Pi_{πάνω}=\Psi_{100}-\Psi_{50} = 10 -5= 5\ m^3/s$ και η υπόλοιπη $\Pi_{κάτω} = \Psi_{50}-\Psi_0 = 5-0 = 5\ m^3/s$. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η μορφή της ροής για χαμηλούς αριθμούς Raynolds έχει την σωστή μορφή συγκρίνοντας την με γνωστά και επιβεβαιωμένα πειραματικά και υπολογιστικά αποτελέσματα. [60]

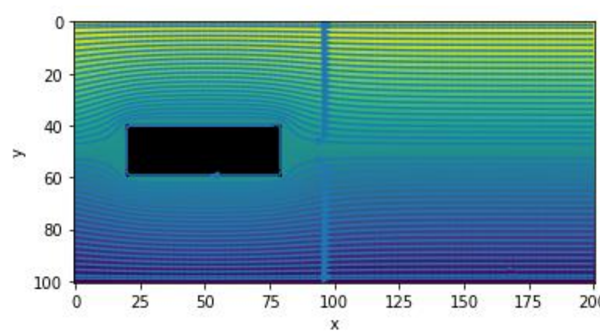


Σχήμα 4.16 α) Ροικές Γραμμές γύρω από τετράγωνο

Ορίζοντας το μήκος ως L και το ύψος ως W, στην πρώτη εφαρμογή χρησιμοποιήσαμε τετράγωνο με λόγω L/W=1. Σε δεύτερη εφαρμογή διπλασιάστηκε και τριπλασιάστηκε το μήκος του σχήματος, δηλαδή L/W=2 και L/W=3.

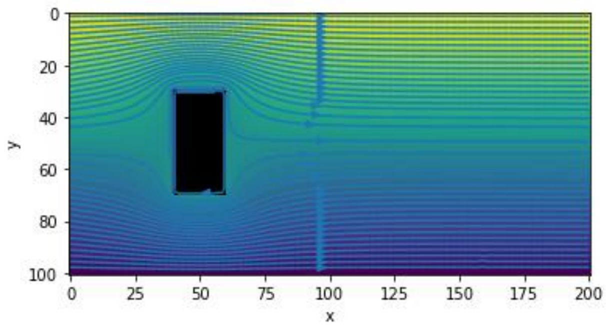


Σχήμα 4.17 L/W=2

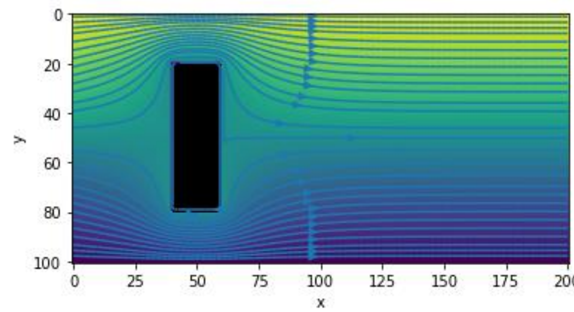


Σχήμα 4.18 L/W=2

Στην συνέχεια έγινε απεικόνιση της ροής για W/L=2 και W/L=3, δηλαδή διπλασιάσαμε και τριπλασιάσαμε το ύψος.

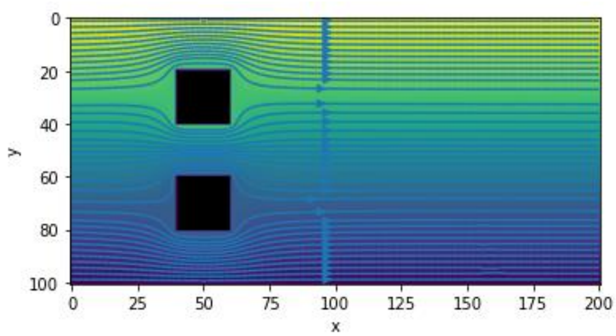


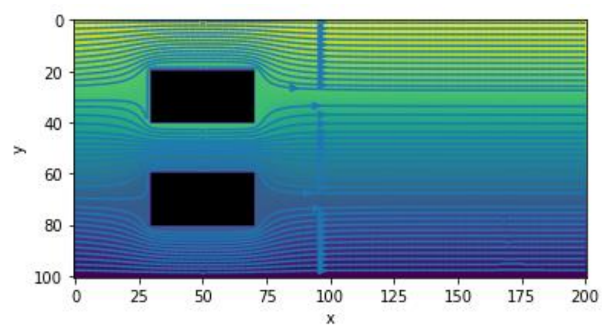
Σχήμα 4.19 W/L=2



Σχήμα 4.20 W/L=3

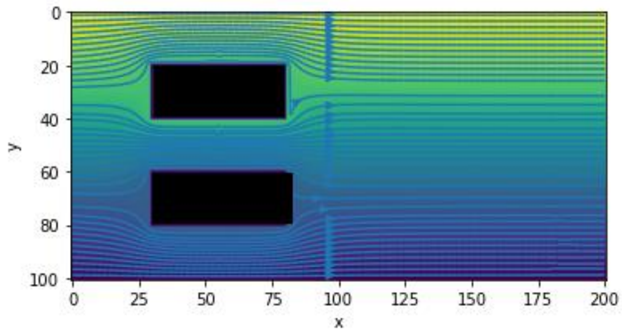
Σε όλες τις περιπτώσεις η ροή είναι ομοιόμορφη, αποκλίνει πριν το σχήμα, χωρίζεται στην μέση και συγκλίνει μετά από αυτό. Σε επόμενη χρησιμοποιήσαμε 2 σχήματα με μήκος L, ύψος W και την μεταξύ τους απόσταση D. Στην πρώτη προσομοιώση δημιοργήθηκε η ροή για L/W= 1 και D=W=L. Στην συνέχεια για L/W=2 και L/W= 3 κρατώντας σταθερή την απόσταση.





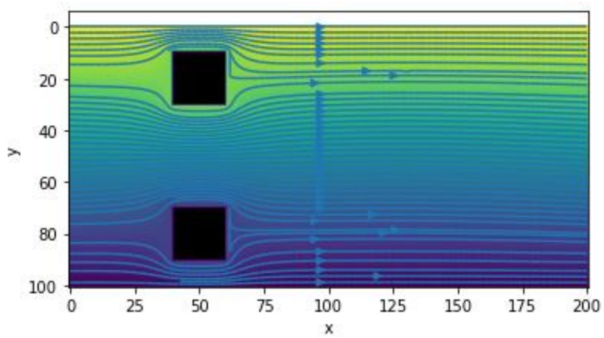
Σχήμα 4.21 L/W=1 και D=W

Σχήμα 4.22 L/W=2 και D=W

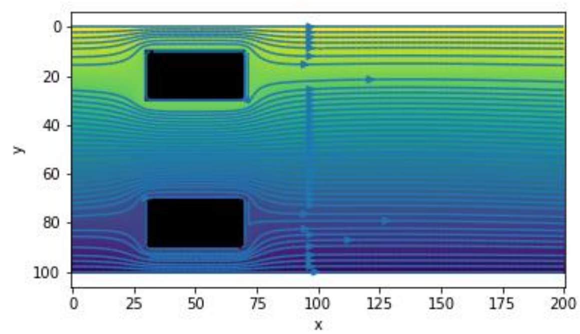


Σχήμα 4.23 L/W=3 και D=W

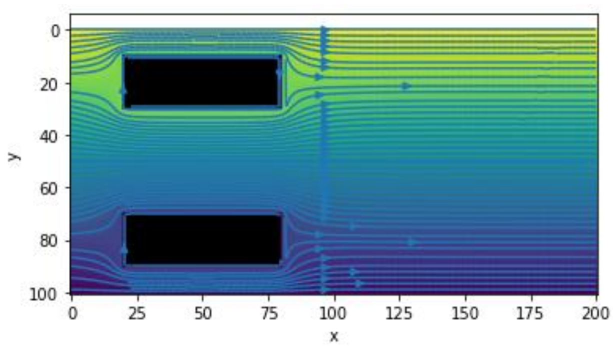
Τέλος διπλασιάσαμε την απόσταση μεταξύ των σχημάτων και έγιναν οι απεικονίσεις για L/W=1, L/W=2 και L/W=3



Σχήμα 4.24 L/W=1 και D=2W

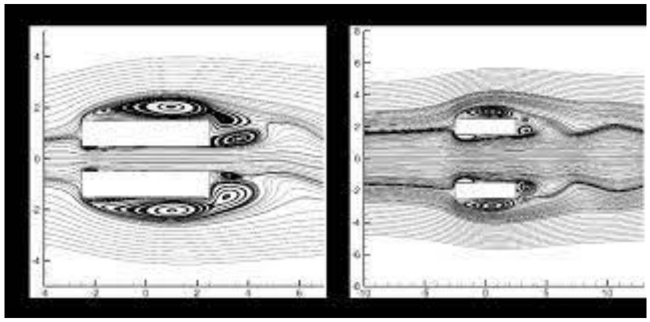


Σχήμα 4.25 L/W=2 και D=2W



Σχήμα 4.26 L/W=3 και D=2W

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ομοιομορφία στην ροή και στον διαχωρισμό της παροχής. Τα αποτελέσματα της ροής ανάμεσα σε 2 σχήματα είναι ίδια με τα αποτελέσματα των Yin, Monaci και Ong [61], για χαμηλούς αριθμούς Renolds.



Σχήμα 4.27 Σύγκριση αποτελεσμάτων

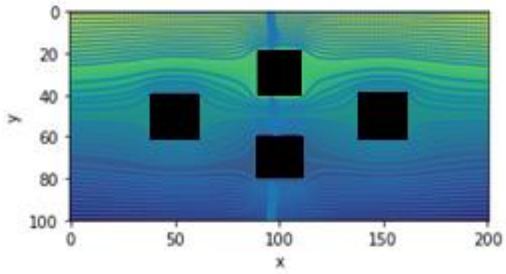
4.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΕ ΦΑΡΑΓΚΙΑ ΔΡΟΜΩΝ

Η μόλυνση του αέρα είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις μεγάλες αστικές περιοχές. Το μικρόκλιμα αυτών των περιοχών εξαρτάται από την μορφολογία, το γεωμετρικό μοτίβο, τον προσανατολισμό και την πυκνότητα των κτηρίων σε αυτές τις περιοχές. Η μόλυνση του αέρα είναι σημαντικό παγκόσμιο φαινόμενο και σχετίζεται άμεσα με την παραγωγή ρύπων από οικείες αλλά κυρίως από την βιομηχανία. Τα εργοστάσια παράγουν πολύ μεγάλα ποσά ρύπων που είναι επιβλαβή για το περιβάλλον και για τους ανθρώπους. Η μελέτη της κίνησης και διασποράς αυτών των ρύπων χρησιμοποιώντας θερμοδυναμική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την βιομηχανία.

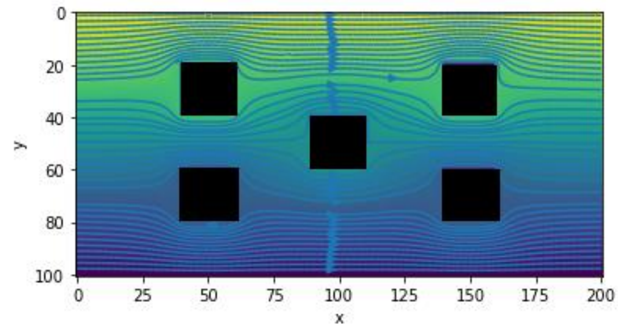
Ως φαράγγι δρόμου ορίζουμε έναν στενό οριζόντιο δρόμο από κτήρια, που θεωρούμε ότι είναι οριοθετημένος από τον δρόμο και από τις στέγες κτηρίων. Οι διαστάσεις του δρόμου συνήθως εκφράζονται χρησιμοποιώντας αναλογίες μεταξύ του ύψος των κτηρίων Η και του πλάτους του δρόμου, δηλαδή την απόσταση μεταξύ 2 απέναντι κτηρίων, W. Ένα κανονικό φαράγγι δρόμου έχει λόγο 1 και δεν υπάρχουν ανοίγματα στα τοιχώματα. Ως φαράγγι λεωφόρου συνήθως ονομάζουμε τον δρόμο με λόγο μικρότερο του 0.5 και ως βαθύ φαράγγι αν ο λόγος είναι μεγαλύτερος του 2. Αντίστοιχα για λόγους L/H = 3, L/H=5,L/H=7 έχουμε κοντό, μέτριο και μακρύ φαράγγι δρόμου. Οι αστικοί δρόμοι μπορούν χαρακτηριστούν και ως συμμετρικοί αν τα κτήρια έχουν το ίδιο ύψος και ασύμμετροι αν υπάρχουν μεγάλες διαφορές στα ύψη των κτηρίων.

Στο παρελθόν έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές μελέτες σχετικά με τη μοντελοποίηση και το πειραματικό πεδίο στοχεύει στην καθιέρωση μοτίβων διασποράς και μετασχηματισμού ρύπων σε φαράγγια δρόμων. Έχουν υιοθετηθεί διαφορετικές τεχνικές μοντελοποίησης και παρακολούθησης ανάλογα με τον στόχο κάθε έρευνας. Οι θεωρητικές μελέτες εστιάζονται κυρίως στη διερεύνηση διαφορετικών καθεστώτων ροής ανέμου και διασποράς ρύπων με χρήση μαθηματικών μοντέλων, ενώ οι μελέτες που είναι καθαρά πειραματικές, βασίζονται αποκλειστικά σε μετρήσεις πλήρους ή μειωμένης κλίμακας. Συνήθως, οι μελέτες του φαραγγιού δρόμου έχουν συνδυάσει τόσο τη μαθηματική μοντελοποίηση όσο και την πειραματική εργασία.

Για την ροή και διασπορών ρύπων θα γίνει ανάλυση στο επόμενο κεφάλαιο. Για αυτό το κεφάλαιο έγινε προσομοίωση της ροής ασυμπίεστου και αστρόβιλου ρευστού σε φαράγγια δρόμων με 4 και 5 κτήρια



Σχήμα 4.28 Ροικές Γραμμές γύρω από 4 τετράγωνα



Σχήμα 4.29 Ροικές Γραμμές γύρω από 5 τετράγωνα

Όπως βλέπουμε η παροχή ανάμεσα στα κτήρια

χωρίζεται ομοιόμορφα και τα αποτελέσματα έχουν την αναμενόμενη τιμή. Ολες οι παραπάνω εφαρμογές μπορούν να συγκριθούν με γνωστά πειράματα όπως των Nandgaonkar, Thete και Bhat [57] τα οποία επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα μας για μικρούς αριθμούς Reynolds.

5.0 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΟΛΥΝΣΗ ΤΟΥ ΑΕΡΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΕΝΑ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν στοιχεία υπολογιστικής ρευστομηχανικής και αναπτύχθηκαν κώδικες για την απεικόνιση ροών σε διάφορα γεωμετρικά πεδία με ή χωρίς την ύπαρξη σωμάτων εντός των πεδίων.

Η εμβάθυνση στο αντικείμενο και η συνεργασία μιας ομάδας ερευνητών για μεγάλη χρονική διάρκεια θα μπορούσε να οδηγήσει στην ανάπτυξη ενός μεγάλου και εύχρηστου υπολογιστικού κώδικα, όπως είναι για παράδειγμα το Fluent, που είναι ένα πολύ γνωστό εμπορικό πακέτο Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD).

Με χρήση αυτού του πακέτου και με τη συνεργασία του ερευνητικού προσωπικού του εργαστηρίου μηχανικής των ρευστών, μελετήθηκε η ροή αέρα και ρύπων σε ροϊκά πεδία ανάμεσα από οικοδομικά τετράγωνα διαφόρων γεωμετριών.

Τα αποτελέσματα δείχνουν τη σπουδαιότητα τέτοιου είδους υπολογιστικών εργαλείων για τη μελέτη ροϊκών πεδίων με στόχο τη βέλτιστη ροϊκή συμπεριφορά, που βοηθά και στην βελτίωση της ποιότητας ζωής.

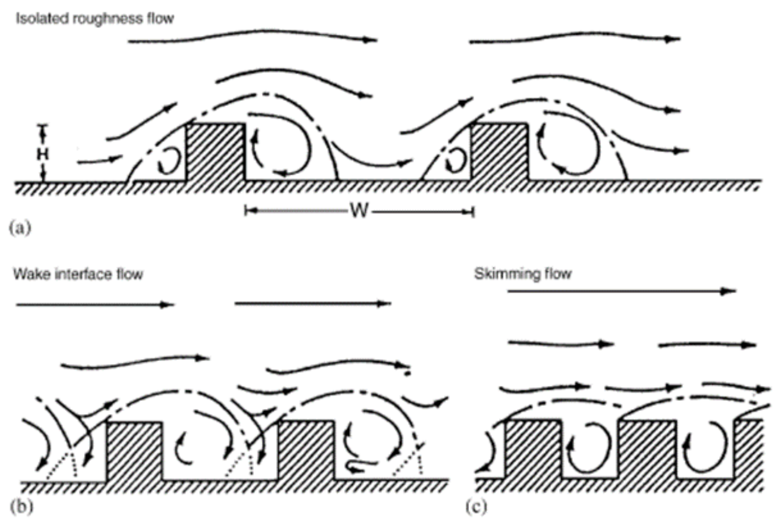
Θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω το ερευνητικό προσωπικό του εργαστηρίου για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το αντικείμενο και να εκτιμήσω ακόμα περισσότερο τη βασική μου εργασία, βλέποντας από που ξεκινάει και που θα μπορούσε να φτάσει το τελικό προϊόν αυτής της ερευνητικής δραστηριότητας.

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τους Georgii [40] , Oke [41] και Bitan [42] , η επίδραση της ατμοσφαιρικής ρύπανσης στα αστικά περιβάλλοντα έχει γίνει ένα σημαντικό ερευνητικό ζήτημα, οδηγώντας σε πολυάριθμες μελέτες μοντελοποίησης που σχετίζονται με την επίδραση των κτιρίων και άλλων αστικών κατασκευών στη συσσώρευση ρύπων /σχέδια διάχυσης. Τα κύρια χαρακτηριστικά της διασποράς των ρύπων στα αστικά φαράγγια είναι καλά κατανοητά μέσα από τις πρωτοποριακές εργασίες των Johnson [43,44], Dabbberdt [45], Hotchkiss και Harlow [46].

Τα μοντέλα διασποράς χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της ποιότητας του αέρα στις παρυφές του δρόμου παρέχοντας προβλέψεις για τα σημερινά και μελλοντικά επίπεδα ατμοσφαιρικής ρύπανσης και επίσης χρονικές και χωρικές διακυμάνσεις [41]. Είναι πολύ χρήσιμα καθώς παρέχουν πληροφορίες για τις φυσικές και χημικές διεργασίες που διέπουν τη διασπορά και τον μετασχηματισμό των ατμοσφαιρικών ρύπων.

Η διασπορά των αέριων ρύπων σε ένα φαράγγι του δρόμου εξαρτάται γενικά από τον ρυθμό με τον οποίο ο δρόμος ανταλλάσσει αέρα κατακόρυφα με την παραπάνω ατμόσφαιρα στο επίπεδο της οροφής και πλευρικά με τους συνδετικούς δρόμους [47]. Η ωσεί λεία ροή (skimming flow), χαρακτηριστικό των κανονικών φαραγγιών, παρέχει ελάχιστο αερισμό του φαραγγιού και είναι σχετικά αναποτελεσματική στην απομάκρυνση των ρύπων [48]. Αυξημένες συγκεντρώσεις ρύπων βρίσκονται στην υπήνεμη πλευρά του φαραγγιού του δρόμου ενώ μειώνονται οι συγκεντρώσεις πάνω από το έδαφος και στις δύο πλευρές του δρόμου. Αυξημένες συγκεντρώσεις υπήνεμες προκαλούνται από τη συσσώρευση ρύπων σε τοπικό επίπεδο που τροφοδοτούνται από τη μεγάλη δίνη ανέμων που καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος του φαραγγιού. Σημαντικές συγκεντρώσεις ρύπανσης δημιουργούνται και σε μικρές κοιλότητες, όπου μπορούν να επιφέρουν πρόσθετα φαινόμενα ανακυκλοφορίας.



Σχήμα 5.1) Φαινόμενα ανακυκλοφορίας σε φαράγγια δρόμου

5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΕ ΦΑΡΑΓΚΙΑ ΔΡΟΜΟΥ

Τα τελευταία χρόνια, πολλές μελέτες υπολογιστικής ρευστομηχανικής πραγματοποιήθηκαν συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους με πειράματα πλήρους και μειωμένης κλίμακας. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν παραλλαγές του προεξέχοντος μοντέλου κλειστού στροβιλισμού k-ε. Η υπολογιστική ρευστομηχανική έχει αποδείξει τη δύναμή της στην ερμηνεία πολλών φαινομένων που συμβαίνουν σε φαράγγια δρόμων. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα των μοντέλων της είναι η σχετικά εύκολη εξέταση πολλών διαφορετικών σεναρίων ροής και έκλυσης ρύπων σε διαφορετικές γεωμετρίες. Η κοινότητα της αιολικής μηχανικής έχει από καιρό υιοθετήσει τα δύο μοντέλα τυρβώδους ροής, συγκεκριμένα το τυπικό μοντέλο τυρβώδους ροής k-ε, για να αναπαραστήσει με επιτυχία το πεδίο ροής ανέμου [44,45,46] αν και δεν είναι τόσο ακριβές για ροές που περιλαμβάνουν περιοχές πρόσκρουσης και διαχωρισμού κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε κακή πρόβλεψη των δομών ροής μετά από τα κτήρια [47]. Για το λόγο αυτό, ορισμένοι συγγραφείς υποστηρίζουν την ανάγκη υιοθέτησης ενός άλλου εναλλακτικού τυρβώδους μοντέλου για να διασφαλιστούν αξιόπιστα αποτελέσματα. Ανακάλυψαν ότι το μοντέλο RNG k-ε παρέχει τα καλύτερα αποτελέσματα στην κατανομή συγκέντρωσης ρύπων σε ένα φαράγγι δρόμου σε σύγκριση με το πρότυπο k-ε και το Realizable k-ε μοντέλο. Ο στόχος αυτής της μελέτης είναι η χρήση του μοντέλου k-ε για την προσομοίωση της τρισδιάστατης ροής μέσα σε ένα φαράγγι του δρόμου και την πρόβλεψη των δομών ροής.

Το τυρβώδες μοντέλο με κινητική ενέργεια K και διάχυση ε, περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_k\mu_{eff}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)+G_k+G_b-\rho\varepsilon-Y_M(5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_\varepsilon\mu_{eff}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right)+C_{\iota\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}(G_k+G_{3\varepsilon}G_b)-C^*{}_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}(5.2)$$

όπου a_k και a_ε είναι οι αντίστροφοι ενεργοί αριθμοί Prandtl για k και ε, G_k είναι η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας στροβιλισμού λόγω των βαθμίδων μέσης ταχύτητας, G_b αντιπροσωπεύει τη δημιουργία κινητικής ενέργειας τύρβης λόγω άνωσης, Y_M είναι η συμβολή της κυμαινόμενης διαστολής σε συμπιέσιμο στροβιλισμό στον συνολικό ρυθμό διάχυσης και $C^*{}_{2\varepsilon}$ δίνεται από την σχέση:

$$C^*{}_{2\varepsilon}\equiv C_{2\varepsilon}+\frac{C_\mu\eta^3\left(1-{}^{\eta}/_{\eta_0}\right)}{1+\beta\eta^3}(5.3)$$

Όπου η_0 = 4.38, β = 0.012

$$S \equiv 2\sqrt{S_{ij}S_{ij}}(5.4)$$

Και
$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)(5.5)$$

Το τυρβώδες ιξώδες για χαμηλούς αριθμούς Reynolds δίνεται από την διαφορική εξίσωση:

$$d\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 1.72\frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}}d\hat{v}(5.6)$$

$$\hat{v} = {}^{\mu_{eff}}/_{\mu}\,(5.7)$$

Για υψηλούς αριθμούς Reynolds αυτό δίνει:

$$\mu_1 = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}(5.8)$$

και οι σταθερές του μοντέλου είναι

$$C1\varepsilon = 1.42, Cv \approx 100 and C2\varepsilon = 1.68(5.9)$$

Πολυφασικό Μοντέλο:

Για την p φάση , η εξίσωση συνέχειας γράφεται ως:

$$\frac{1}{\rho_p}[\frac{\partial}{\partial t}(a_p\rho_p) + \nabla\left(a_p\rho_p\overrightarrow{u_p}\right) = S_{a_p} + \sum_{p=1}^{n}(\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp})] \quad (5.10)$$

Όπου:

- ρ_p η πυκνότητα του p ρευστού.
- m_{pq} Η μάζα που μεταφέρεται από την φάση p στην φάση q.
- m_{qp} Η μάζα που μεταφέρεται από την φάση q στην φάση p.

Η παραπάνω εξίσωση λύθηκε για τη δευτερεύουσα φάση με τον περιορισμό ότι για την πρώτη φάση

$$\sum_{p=1}^{n} a_p = 1 (5.11)$$

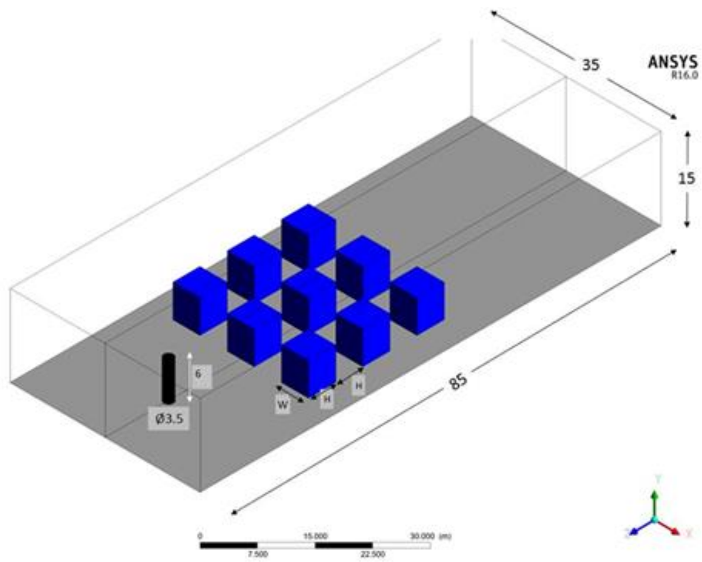
Και η εξίσωση ορμής γράφεται ως:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \nabla(\rho\vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla[\mu(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}})] + \rho\vec{g} (5.12)$$

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

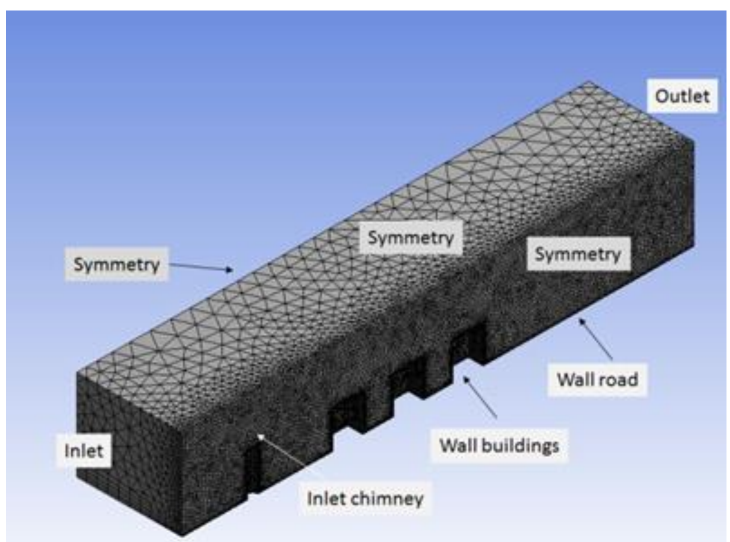
Σε αυτή την έρευνα χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό CFD Fluent 16.0. Οι τρισδιάστατες σταθερές εξισώσεις RANS επιλύονται σε συνδυασμό με το πραγματοποιήσιμο μοντέλο k-ε. Το πραγματοποιήσιμο μοντέλο αναταράξεων k-ε επιλέγεται λόγω της γενικής καλής του απόδοσης για τη ροή ανέμου γύρω από τα κτίρια [56]. Το ANSYS Fluent 16.0 επιλέχθηκε για την αριθμητική προσομοίωση της κίνησης και της διασποράς των ρύπων. Η ροή του ανέμου και της ατμοσφαιρικής ρύπανσης από τρεις ρύπους (CO_2, CH_4 και NO_2) διερευνάται σε αυτή τη μελέτη. Οι αέριοι ρύποι εισέρχονται στο τμήμα μέτρησης μέσω της κορυφής μιας καμινάδας και μεταφέρονται από τον αέρα. Δοκιμάστηκαν δύο διαφορετικά γεωμετρικά μοτίβα. Το πρώτο με τα κτίρια κάθετα προς τη ροή του ανέμου και το δεύτερο με την ίδια γεωμετρία με περιστροφή κατά 45° προς την ροή ρύπων. Τέλος, δοκιμάστηκαν τέσσερις διαφορετικές ταχύτητες αέρα (1m/s, 3m/s, 5m/s και 10m/s).

Η γεωμετρία σε αυτή την έρευνα αποτελείται από τρεις σειρές κτιρίων. Η απόσταση μεταξύ τους είναι 6 μέτρα. Οι διαστάσεις κάθε κτιρίου είναι το ύψος (Υ) και το πλάτος (Π) που είναι ίσες (Υ=Π=6 μέτρα). Η πηγή ρύπανσης ήταν μια καμινάδα τοποθετημένη μπροστά από τα κτίρια σε απόσταση ίση με 13,5 μέτρα. Οι διαστάσεις της καμινάδας είναι ύψος (H) = 6m και διάμετρος (D) = 3,5 m. Η απόσταση της καμινάδας από την είσοδο είναι 11,5 μέτρα.



Σχήμα 5.2 Φαράγγια δρόμου

Η γεωμετρία διακριτοποιήθηκε σε 435200 τετραεδρικά στοιχεία. Οι συνοριακές συνθήκες για την αριθμητική προσομοίωση είναι: είσοδος ταχύτητας, συμμετρία, κτίρια , Δρόμος και έξοδος. Αυτές οι συνοριακές συνθήκες παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



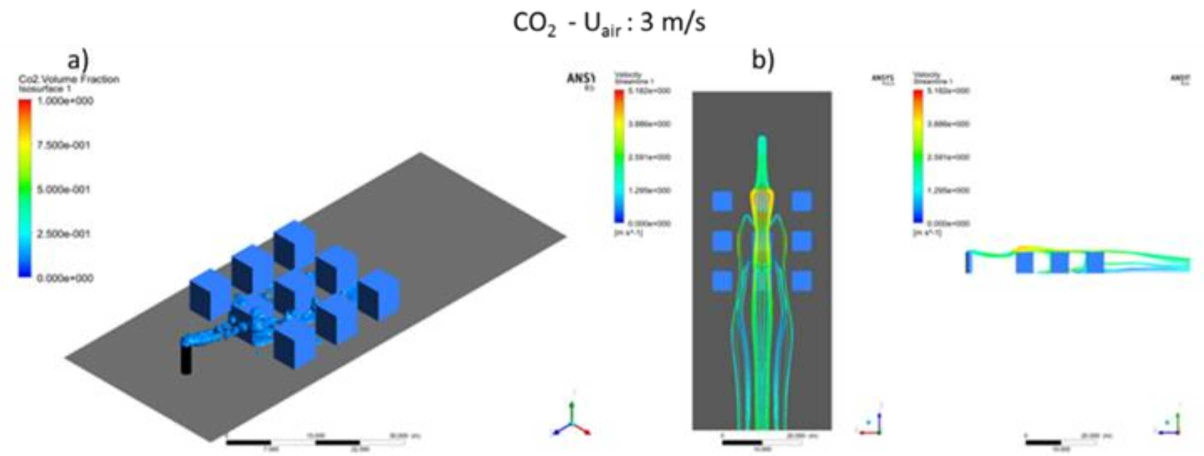
Σχήμα 5.3 Πλεγματική Δομή με συνοριακές συνθήκες

Σχήμα 5.4 Πλεγματική Δομή

Τρεις διαφορετικοί ρύποι επιλέχθηκαν για δοκιμή: διοξείδιο του άνθρακα (CO_2), μεθάνιο (CH_4) και διοξείδιο του αζώτου (NO_2). Το μεθάνιο (ρ=0,6679 kg/m^3) έχει μικρότερη πυκνότητα από τον αέρα (ρ=1,225 kg/m^3). Το διοξείδιο του αζώτου (ρ=1 kg/m^3) έχει περίπου την ίδια πυκνότητα με τον αέρα και το διοξείδιο του άνθρακα (ρ=1,7878 kg/m^3) που έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από τον αέρα. Οι ρύποι με μικρότερη πυκνότητα από τον αέρα τείνουν να ανεβαίνουν ενώ αυτοί με μεγαλύτερη από τον αέρα τείνουν να κατεβαίνουν [36].

Τα μεγέθη ενδιαφέροντος παρουσιάζονται ως προς το κλάσμα όγκου του ρύπου (τιμή=0.1) και τις ροϊκές γραμμές ταχύτητας. Οι ταχύτητες αέρα 1 m/s και 10 m/s δεν έδωσαν αξιοσημείωτα αποτελέσματα, επομένως δεν αναλύονται παρακάτω.

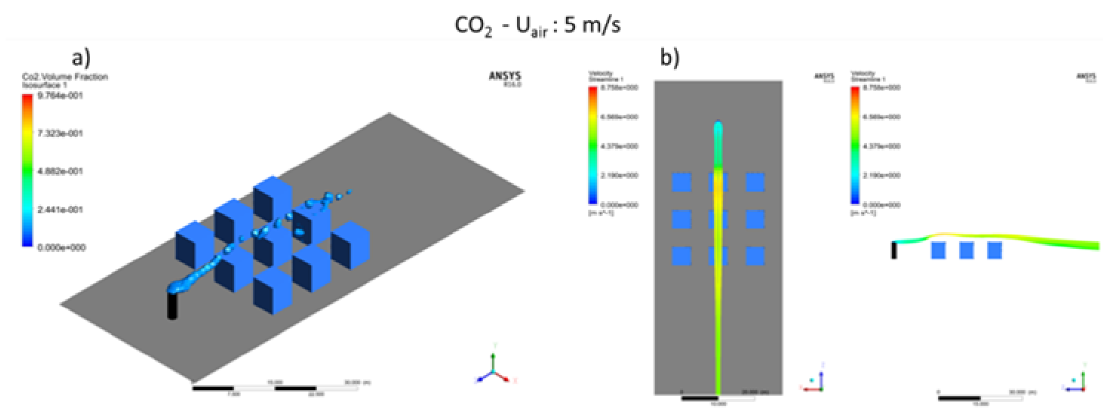
Τα σχήματα 5.4 έως 5.6 δείχνουν φαινόμενα ρύπανσης στο φαράγγι του δρόμου όπου η ροή των ρύπων ερευνήθηκε στην αρχική γεωμετρία με τα κτίρια κάθετα προς τη ροή του ανέμου. Το σχήμα 5.5 απεικονίζει την κατανομή του CO_2 με ταχύτητα αέρα ίση με 3 m/s. Παρατηρείται ότι η ρύπανση επηρεάζει το μπροστινό τμήμα του πρώτου κτιρίου στη μεσαία σειρά και στη συνέχεια ο ρύπος διοχετεύεται στα κενά μεταξύ των κτιρίων. Η προσήνεμη πλευρά έχει μεγαλύτερη συγκέντρωση από την υπήνεμη που ισχύει σχεδόν σε κάθε προσομοίωση.



Σχήμα 5.5 Κατανομή του CO_2 στην πλεγματική δομή για u = 3m/s

a) Ως προς τον όγκο b)Ροϊκές γραμμές ταχύτητας

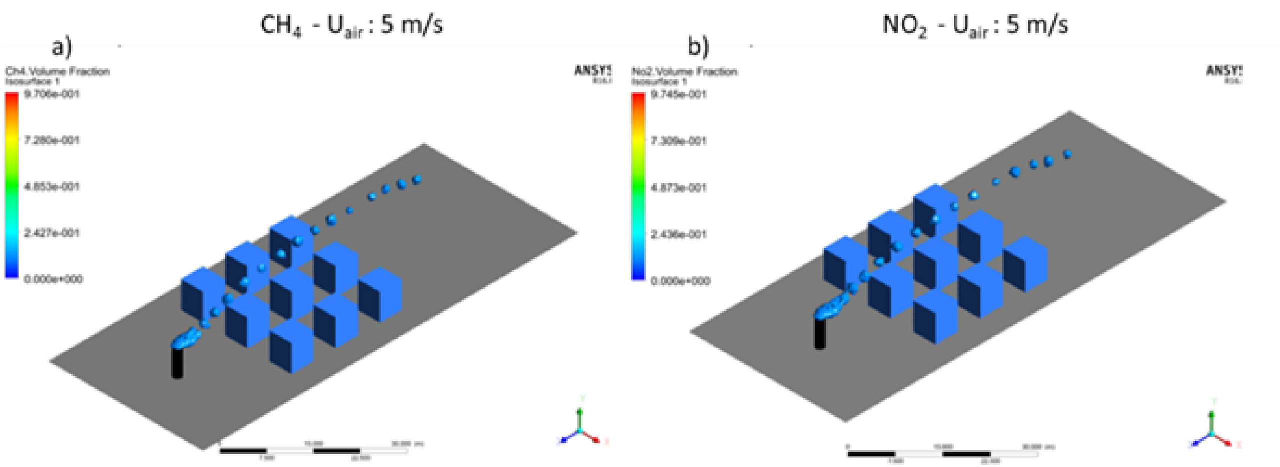
Στο σχήμα 5.6 παρατηρείται ότι όταν η ταχύτητα του αέρα ρυθμίστηκε στα 5 m/s, ο ρύπος (CO_2) μεταφέρθηκε στο πάνω μέρος του φαραγγιού του δρόμου, δηλαδή στις στέγες των κτιρίων. Έτσι, τα κτίρια δεν επηρεάζονται άμεσα.



Σχήμα 5.6 Κατανομή του CO_2 στην πλεγματική δομή για u = 5m/s

a)Ως προς τον όγκο b)Ροικές γραμμές ταχύτητας

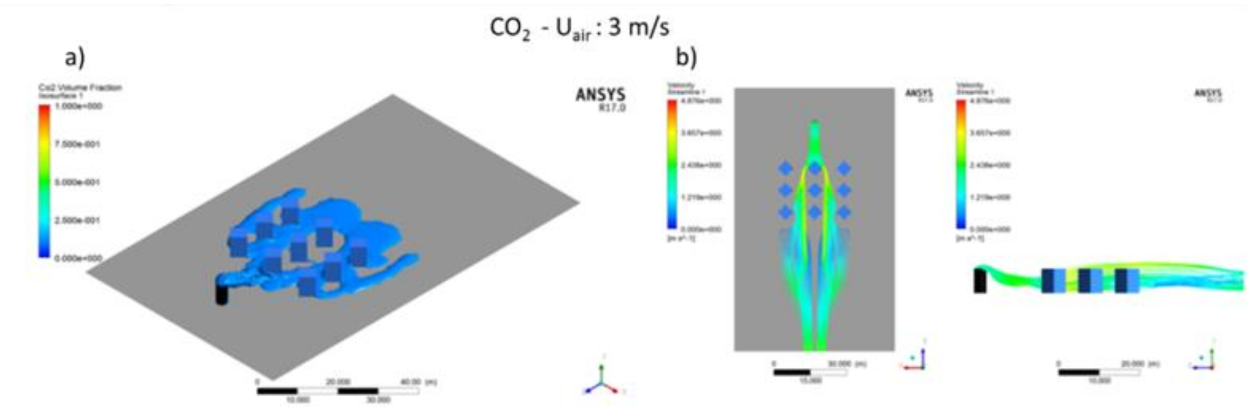
Όσον αφορά τους άλλους δύο ρύπους CH_4 και NO_2, παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά καθώς το νέφος του ρύπου αερίου τείνει να ανεβαίνει και στις δύο περιπτώσεις (σχήμα 5.7). Η ταχύτητα του αέρα ορίστηκε στα 5 m/s για κάθε προσομοίωση. Αυτό οφείλεται στην πυκνότητα του ρύπου που είναι χαμηλότερη από την πυκνότητα του αέρα, επομένως ο ρύπος έχει την τάση να μεταφέρεται σε υψηλότερα σημεία του φαραγγιού του δρόμου. Ως συνοπτικό συμπέρασμα, παρατηρείται ότι τα κτίρια δεν επηρεάζονται από τη ρύπανση αλλά η επίδραση των ρύπων στο περιβάλλον είναι σοβαρή, ειδικά για το μεθάνιο που έχει 33 φορές μεγαλύτερη επίδραση στο περιβάλλον σε σύγκριση με το διοξείδιο του άνθρακα (σε περίοδο 100 ετών) σύμφωνα με μια πρόσφατη έρευνα.



Σχήμα 5.7 Κλάσμα όγκου κατανομής για u = 3m/s

α) CH_4 b) NO_2

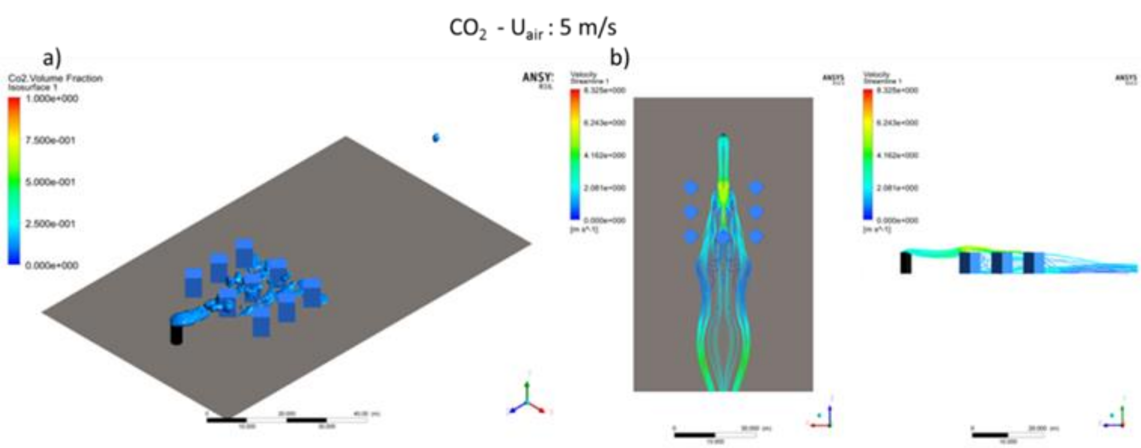
Τα σχήματα 5.8 έως 5.10 απεικονίζουν τη ροή της ατμοσφαιρικής ρύπανσης για τη δεύτερη περίπτωση όπου η γεωμετρία περιστρέφεται κατά 45° προς τη ροή του ανέμου. Από το Σχήμα 5.8, που παρουσιάζει την κατανομή του CO_2 με ταχύτητα αέρα ίση με 3 m/s, μπορεί να γίνει κατανοητό ότι ο ρύπος έχει παγιδευτεί στο κάτω μέρος του φαραγγιού. Υψηλότερη συγκέντρωση ρύπανσης εντοπίστηκε στο κάτω μέρος του φαραγγιού του δρόμου καθώς και στα ανοίγματα μεταξύ των κτιρίων. Η μεσαία σειρά κτιρίων είναι η πιο επηρεασμένη από τη ροή ρύπανσης λόγω περιστροφής 45°. Αυτή η προσέγγιση υποδεικνύει το χειρότερο σενάριο ανακύκλωσης της ατμοσφαιρικής ρύπανσης. Μικρές εστίες ρύπανσης μπορεί επίσης να δημιουργηθούν σε μικρές κοιλότητες όπου μπορεί να συμβούν πρόσθετα φαινόμενα ανακυκλοφορίας.



Σχήμα 5.8 Κατανομή του CO_2 για u = 3m/s

α) Κλάσμα όγκου b) Ροικές γραμμές ταχύτητας

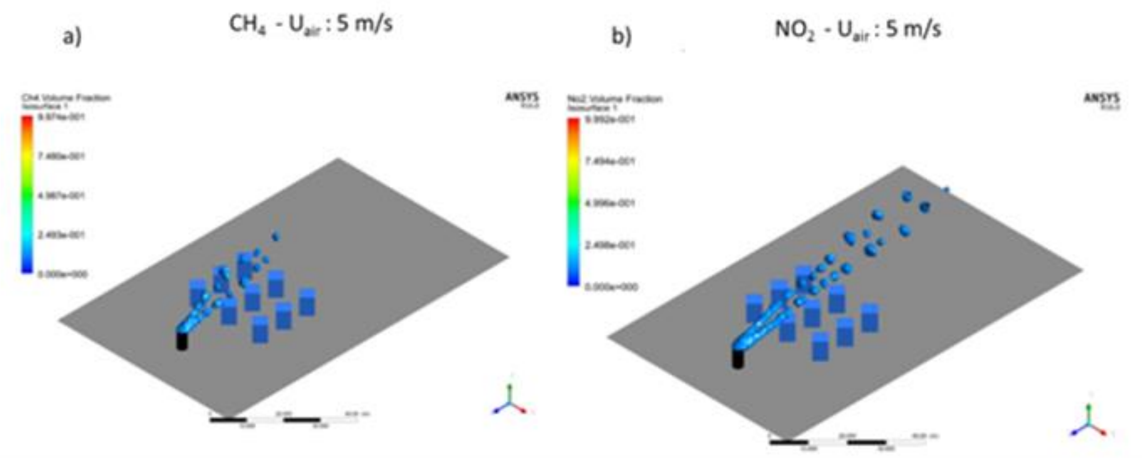
Το Σχήμα 5.9 παρουσιάζει επίσης την κατανομή του CO_2, όπου η ταχύτητα του αέρα ορίστηκε στα 5 m/s, η οποία δείχνει παρόμοια συμπεριφορά ροής με την προηγούμενη, με τη μόνη διαφορά ότι η συγκέντρωση είναι χαμηλότερη και η διάχυση όχι τόσο εκτεταμένη.



Σχήμα 5.9 Κατανομή του CO_2 για u = 3m/s

α) Κλάσμα όγκου b) Ροϊκές γραμμές ταχύτητας

Στις τελευταίες προσομοιώσεις που φαίνονται παρακάτω στο σχήμα 5.10, η ροή των ρύπων CH_4 και NO_2 διαχέεται πάνω από την ατμόσφαιρα της οροφής. Όσον αφορά το NO_2, η ρύπανση μεταφέρθηκε στο ανώτερο τμήμα του φαραγγιού και σε περιοχές μακριά από τα κτίρια. Σε αυτή την περίπτωση η ροή των ρύπων είναι σχεδόν η ίδια όπως στην πρώτη περίπτωση.



Σχήμα 5.10 α) CH_4 κλάσμα όγκου-κατανομής για το CH_4 στην δεύτερη γεωμετρία

b) NO_2 κλάσμα όγκου-κατανομής για το CH_4 στην δεύτερη γεωμετρία

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από την άποψη της πρόσφυσης όγκου ρύπων και των ρευμάτων αέρα αποδεικνύουν ότι εάν η πυκνότητα του ρύπου είναι χαμηλότερη από την πυκνότητα του αέρα, $\rho_{pollutant}<\rho_{air}$, ο ρύπος αερίου τείνει να ανεβαίνει στο ανώτερο επίπεδο του τμήματος. Εάν η πυκνότητα του ρύπου είναι περίπου ίδια με την πυκνότητα του αέρα, $\rho_{pollutant}\approx\rho_{air}$, το νέφος του ρύπου αερίου δεν ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει. Εάν η πυκνότητα του ρύπου είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του αέρα, $\rho_{pollutant}>\rho_{air}$, το νέφος του ρύπου αερίου τείνει να κατέβει.

5.4 ΣΧΟΛΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΡΟΗΣ ΡΥΠΩΝ ΣΕ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σημαντική προσπάθεια για τη βελτίωση της επιστημονικής κατανόησης των φαινομένων διασποράς και μετασχηματισμού που διέπουν την ποιότητα του αέρα στις πόλεις και ένας μεγάλος αριθμός μελετών επικεντρώθηκε στη συμπεριφορά ροής σε φαράγγια δρόμων. Ο φυσικός αερισμός των αστικών δρόμων μειώνεται κυρίως λόγω της παρουσίας κτιρίων. Εντός του αστικού θόλου, δίνες ανέμου, περιοχές χαμηλής πίεσης και φαινόμενα διοχέτευσης ενδέχεται να δημιουργηθούν υπό ορισμένες μετεωρολογικές συνθήκες, προκαλώντας σε ορισμένες περιπτώσεις εστίες ατμοσφαιρικής ρύπανσης.

Σε αυτή τη μελέτη για τα πεδία ροής παρουσιάζεται η συμπεριφορά του αιολικού περιβάλλοντος γύρω από τα κτίρια και είναι βολικό να κατανοήσουμε ποιες τοποθεσίες είναι πιθανό να υποφέρουν λόγω των φαινομένων ανέμου και ανακυκλοφορίας που δημιουργούνται από τα κτίρια. Η εργασία που περιγράφεται σε αυτή την εργασία παρουσιάζει τη ροή του ανέμου και της ατμοσφαιρικής ρύπανσης από τρεις ρύπους (CO_2, CH_4, NO_2) που εκπέμπονται από μια καμινάδα μπροστά από ένα κτιριακό συγκρότημα που αποτελείται από εννέα κτίρια ύψους έξι μέτρων το καθένα, χρησιμοποιώντας τέσσερις ταχύτητες για τον αέρα. Οι προσομοιώσεις ήταν ασταθείς (εξαρτώμενες από το χρόνο) και η απεικόνιση τους παρουσιάστηκε ως προς το κλάσμα όγκου του ρύπου (τιμή=0,1) και τις ροϊκές γραμμές ταχύτητας. Τα συμπεράσματα με βάση της προσομοίωση είναι τα εξής:

- Παρουσιάστηκαν σημαντικά αποτελέσματα για τον ρύπο CO_2 σε ταχύτητες αέρα 3 m/s και 5 m/s όπου η ρύπανση εγκλωβίζεται στο κάτω μέρος του φαραγγιού και επηρεάζει άμεσα τα κτίρια.

- Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά μεταξύ της πυκνότητας των ρύπων και της πυκνότητας του αέρα, τόσο πιο σημαντική είναι η τάση προς κατακόρυφες κινήσεις του λοφίου (αναρρίχηση ή κάθοδος). Η πυκνότητα των ρύπων επηρεάζει επίσης τη διασπορά του ρύπου. Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των ρύπων, τόσο μεγαλύτερη είναι η εμβέλεια του νέφους. Σε δεδομένη ταχύτητα ροής αέρα, η διασπορά λοφίου των ρύπων με χαμηλή πυκνότητα είναι ταχύτερη και ευκολότερη από αυτή των ρύπων με μεγαλύτερη πυκνότητα.
- Πειράματα οπτικοποίησης της ροής έχουν δείξει ότι η ισχύς των δινών του φαραγγιού ποικίλλει.
- Από την άποψη της έκθεσης του πληθυσμού, η ποιότητα του αέρα στα φαράγγια των δρόμων είναι μείζονος σημασίας, καθώς τα υψηλότερα επίπεδα ρύπανσης και οι μεγαλύτεροι στόχοι επιπτώσεων συχνά συγκεντρώνονται σε αυτού του είδους τους δρόμους.

6.0 ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική έγινε μελέτη θεωρητικής και υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Εγινε αναλυτική παρουσίαση στην θεωρία της ρευστομηχανικής με αποδείξεις για τις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας χρησιμοποιώντας τα μοντέλο του όγκου ελέγχου και του στοιχείωδους ρευστού. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν διαφορική ή ολοκληρωτική μορφή θεμελιώνουν πλήρως την ρευστομηχανική. Στην συνέχεια έγινε ανάλυση στην κατηγοριοποίηση των διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται στην ρευστομηχανική και στην σημαντικότητα των συνοριακών συνθηκών για την επίλυση των εξισώσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο έγινε περιγραφή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων που εμφανίζονται στην ρευστομηχανική. Συγκεκριμένα έγινε ανάλυση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών, κατά την οποία οι διαφορικές εξισώσεων μετασχηματίζονται σε εξισώσεις διαφορών και της μεθόδου πεπερασμένου όγκου όπου οι ολοκληρωτικές εξισώσεις για έναν πεπερασμένο όγκο υπολογίζονται αριθμητικά.

Στο τρίτο κεφάλαιο έγινε ανάλυση της αστρόβιλης, ασυμπιέστης και χωρίς ιξώδες ροής η οποία περιγράφεται από την εξίσωση Laplace. Γίνεται περιγραφή της ροϊκής συνάρτησης, της συνάρτησης δυναμικού και αποδεικνύεται ότι και οι δυο περιγράφονται από την εξίσωση Laplace. Τέλος γίνεται αναλυτική επίλυση της εξίσωσης Laplace για ομοιόμορφη ταχύτητα 10m/s με την χρήση της βιβλιοθήκης py-pde.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί το σημαντικότερο μέρος αυτής της διπλωματικής και το σημείο στο οποίο αφιερώθηκε ο περισσότερος χρόνος για την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνονται υπολογιστικές εφαρμογές για την απεικόνιση ροϊκών πεδίων με την γλώσσα προγραμματισμού Python και με την χρήση των βιβλιοθηκών numpy και matplotlib. Στην πρώτη εφαρμογή λύνεται αριθμητικά το ίδιο παράδειγμα με αυτό που λύθηκε στο κεφάλαιο 3. Χρησιμοποιήθηκε μια πολύ μικρή πλεγματική διάταξη (10,10) και τα αποτελέσματα ήρθαν σε σύγκλιση πολύ γρήγορα. Σε αυτές τις εφαρμογές χρησιμοποιήθηκαν μικρές πλεγματικές διατάξεις μεγέθους (20,10) και τα αποτελέσματα ήταν πολύ ικανοποιητικά. Στην συνέχεια έγινε η απεικόνιση διάφορων ροϊκών πεδίων γύρω από 1,2, 4 και 5 σχήματα. Για να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιήθηκαν μεγαλύτερες πλεγματικές διατάξεις μεγέθους (200,100) και περισσότερες επαναλήψεις. Αυτή η αύξηση οδήγησε σε αύξηση του χρόνου υπολογισμού, συγκεκριμένα η σύγκλιση των αποτελεσμάτων στα πρώτα παραδείγμα επιτυγχανόταν μέσα σε μερικά δευτερόλεπτα ενώ σε αυτές τις εφαρμογές ο κώδικας χρειάστηκε να τρέχει σχεδόν 45 λεπτά για κάθε εφαρμογή (φυσικά αυτό εξαρτάται από την υπολογιστική ισχύ που έχεις κανείς στην διάθεση του). Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα ήταν πολύ ικανοποιητικά και συγκρίθηκαν με άλλες εργασίες. Οι ροϊκές γραμμές αποκλίναν πριν τα σχήματα και συγκλίναν μετά από αυτά και η παροχή διαχωριζόταν με ομοιόμορφο τρόπο.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο έγινε ανάλυση της εργασίας «CFD MODELLING OF AIR POLLUTION MOTION INSIDE A BUILDING BLOCK», η οποία έχει συγγραφεί από μέλη του εργαστηρίου μηχανικής των ρευστών. Εγινε ανάλυση της ροής ρύπων μέσα σε φαράγγια δρόμων με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου FLUENT. Σκοπός αυτής της μελέτης είναι να βρεθούν οι δομές κτηρίων στις οποίες δημιουργούνται φαινόμενα ανακυκλοφορίας.Τα αποτελέσματα δείχνουν η διασπορά των ρύπων και η κίνηση τους εξαρτάται από την διαφορά της πυκνότητας τους με αυτή του αέρα. Η ευκαιρία που μου δόθηκε από το εργαστήριο μηχανικής των ρευστών, στο να δοκιμάσω και να τρέξω το FLUENT με έκανε να σκεφτώ και να εκτιμήσω την εργασία μου βλέποντας από που ξεκινάει και που θα μπορούσε να εξελιχθεί. Η υπολογιστική μελέτη ρευστών έχει ερευνητικό και βιομηχανικό ενδιαφέρον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bhutta, Muhammad Mahmood Aslam, et al. "CFD applications in various heat exchangers design: A review." *Applied Thermal Engineering* 32 (2012): 1-12.

[2] vanRossum, Guido. "Python reference manual." *Department of Computer Science [CS]* R 9525 (1995).

[3] Hunter, John D. "Matplotlib: A 2D graphics environment." *Computing in science & engineering* 9.03 (2007): 90-95.

[4] Kloss, Christoph, et al. "Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD–DEM." *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal* 12.2-3 (2012): 140-152.

[5] Zawawi, Mohd Hafiz, et al. "A review: Fundamentals of computational fluid dynamics (CFD)." *AIP conference proceedings*. Vol. 2030. No. 1. AIP Publishing LLC, 2018.

[6] Bhaskaran, Rajesh, and Lance Collins. "Introduction to CFD basics." *Cornell University-Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering* (2002): 1-21.

[7] Zawawi, Mohd Hafiz, et al. "A review: Fundamentals of computational fluid dynamics (CFD)." *AIP conference proceedings*. Vol. 2030. No. 1. AIP Publishing LLC, 2018.

[8] Ochoa-Tapia, J. Alberto, and Stephen Whitaker. "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38.14 (1995): 2635-2646.

[9] Massey, Bernard S., and John Ward-Smith. *Mechanics of fluids*. Crc Press, 2018.

[10] Anderson, John David, and J. Wendt. *Computational fluid dynamics*. Vol. 206. New York: McGraw-Hill, 1995.

[11] Busse, Christian, Andrew P. Kach, and Stephan M. Wagner. "Boundary conditions: What they are, how to explore them, why we need them, and when to consider them." *Organizational Research Methods* 20.4 (2017): 574-609.

[12] Engquist, Björn, and Andrew Majda. "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 74.5 (1977): 1765-1766.

[13] Renardy, Michael, and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*. Vol. 13. Springer Science & Business Media, 2006.

[14] Naz, Rahila, Fazal Mahmood Mahomed, and David P. Mason. "Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics." *Applied Mathematics and Computation* 205.1 (2008): 212-230.

[15] Hess, John L. "Panel methods in computational fluid dynamics." *Annual Review of Fluid Mechanics* 22 (1990): 255-274.

[16] Loehner, Rainald. "Finite element methods in CFD: Grid generation, adaptivity, and parallelization." *In AGARD* (1992).

[17] Corrigan, Andrew, et al. "Running unstructured grid-based CFD solvers on modern graphics hardware." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 66.2 (2011): 221-229.

[18] Corliss, George, and Y. F. Chang. "Solving ordinary differential equations using Taylor series." *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 8.2 (1982): 114-144.

[19] Thomée, Vidar. "High order local approximations to derivatives in the finite element method." *Mathematics of Computation* 31.139 (1977): 652-660.

[20] Grätsch, Thomas, and Klaus-Jürgen Bathe. "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis." *Computers & structures* 83.4-5 (2005): 235-265.

[21] Szabó, Barna, and Ivo Babuška. "Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation." (2021).

[22] Eymard, Robert, Thierry Gallouët, and Raphaèle Herbin. "Finite volume methods." *Handbook of numerical analysis* 7 (2000): 713-1018.

[23] Vahtras, O., J. Almlöf, and M. W. Feyereisen. "Integral approximations for LCAO-SCF calculations." *Chemical Physics Letters* 213.5-6 (1993): 514-518.

[24] Dragomir, Sever S., et al. "A generalisation of the trapezoidal rule for the Riemann-Stieltjes integral and applications." *RGMIA research report collection* 3.4 (2000).

[25] Kuncir, Guy F. "Algorithm 103: Simpson's rule integrator." *Communications of the ACM* 5.6 (1962): 347.

[26] Sadowsky, Michael. "A formula for approximate computation of a triple integral." *The American Mathematical Monthly* 47.8 (1940): 539-543.

[27] Moukalled, Fadl, Luca Mangani, and Marwan Darwish. "The finite volume method." *The finite volume method in computational fluid dynamics*. Springer, Cham, 2016. 103-135.

[28] Ferziger, Joel H., Milovan Perić, and Robert L. Street. *Computational methods for fluid dynamics*. Vol. 3. Berlin: springer, 2002.

[29] Strauss, Walter A. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.

[30] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.

[31] DiPerna, Ronald J. "Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws." *Indiana University Mathematics Journal* 28.1 (1979): 137-188.

[32] Li, Peter. "Uniqueness of $ L^ 1$ solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds." *Journal of differential geometry* 20.2 (1984): 447-457.

[33] Zwicker, David. "py-pde: A python package for solving partial differential equations." *Journal of Open Source Software* 5.48 (2020): 2158.

[34] Mitra, Ambar K. "Finite difference method for the solution of Laplace equation." *Department of aerospace engineering Iowa state University* (2010).

[35] Smith, Gordon D., Gordon D. Smith, and Gordon Dennis Smith Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.

[36] Özişik, M. Necati, et al. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press, 2017.

[37] Ondrej Zavila (2012), *Physical Modeling of Gas Pollutant Motion in the Atmosphere,* Vysoka Skola Banska, Technical University of Ostrava, Faculty of Safety Engineering, Ostrava, Vyskovice, Czech Republic

[38] SangJin Jeonga, Malcom J. Andrews (2001), *Application of the k–e turbulence model to the high Reynolds number skimming flow field of an urban street canyon*, Department of Environmental Engineering, Kyonggi University

[39] Vardoulakis, Fisher, Pericleous, Gonzalez-Flesca (2003), *Modelling air quality in street canyons: a review,* Elsevier Science Ltd

[40] Georgii, H.-W. (1969), *The effects of air pollution on urban climates*, Bulletin of the World Health Organization 40, 624–635

[41] Oke, T.R. (1988), S*treet design and urban canopy layer climate*, Energy and Buildings 11, 103–113

[42] Bitan, A. (1992), *The high climatic quality city of the future*, Atmospheric Environment 26B, 313–329

[43] Johnson, G.T., Hunter, L.J. (1995), *A numerical study of dispersion of passive scalars in city canyons*, Boundary- Layer Meteorology 75, 235–262

[44]Dabberdt, W.F., Ludwig, F.L., Johnson, W.B. (1973),*Validation and applications of an urban diffusion model for vehicular pollutants*, Atmospheric Environment 7, 603–618

[45] Hotchkiss, R.S., Harlow, F.H. (1973), *Air pollution transport in street canyons*, EPA-R4-73-029

[46] Sharma, Khare (2001), *Modelling of vehicular exhausts - A review,* Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology, India

[47] Riain, C.M.N., Fisher, B., Martin, C.J., Littler, J. (1998), *Flow field and pollution dispersion in a central London street*, Environmental Monitoring and Assessment 52, 299–314

[48] Hunter, L.J., Johnson, G.T., Watson, I.D. (1992), *An investigation of three-dimensional characteristics of flow regimes within the urban canyon*, Atmospheric Environment 26B (4)

[49] Gosman, A.D. (1999), *Developments in CFD for industrial and environmental applications in wind engineering*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 81, 21–39

[50] Versteeg, H.K., Malalasekera, W. (1995), *An introduction to computational fluid dynamics—the finite volume method*, Longman Scientific and Technical, New York

[51] Mochida A., Tominaga Y., Murakami S., Yoshi R., Ishihara T. and Ooka R. (2002), *Wind and Structures*, Volume 5, pp 227-244, Techno-Press

[52] Vardoulakis S., Dimitrova R., Richards K., Hamlyn D., Camilleri G., Weeks M., Sini JF., Britter R., Borrego C., Schatzmann M. and Moussiopoulos N. (2011), *Numerical Model Inter-comparison for Wind Flow and Turbulence Around Single-Block Buildings***,**Volume 16, pp 169-181

[53] Idris, Irwan and Ammar (2012), *Steady State Vortex Structure of Lid Driven Flow Inside Shallow Semi-ellipse Cavity*, Journal of Mechanical Engineering and Sciences (JMES)

[54]Afiq Witri Muhammad Yazid, nor azwadi Che Sidik, Salim Mohamed Salim and nur Hamizah Mohamad Yusoff (2013), *Numerical Prediction of Air Flow Within Street Canyon Based On Different two-equation k-ε Models*, IOP Publishing

[55]Fluent Inc., *Fluent 15 Documentation-User's Guide*, 2013

[56] Franke, J. (2006), *Recommendations of the COST action C14 on the use of CFD in predicting pedestrian wind environment*, The Fourth International Symposium on Computational Wind Engineering, Yokohama, Japan

[57] Thete, Sumeet, Kaustubh Bhat, and M. R. Nandgaonkar. "2D Numerical Simulation of Fluid Flow over a Rectangular Prism." *CFD Letters* 1.1 (2009): 43-49.

[58] White, Frank M., and Joseph Majdalani. *Viscous fluid flow*. Vol. 3. New York: McGraw-Hill, 2006.

[59] Bansal, R. K., R. C. Sachdeva, and V. Seshadari. "Application of finite element method to potential flow over a cylinder." *Indian Journal of Mechanical Engineering Division* 61 (1981): 175-180.

[60] Sen, Subhankar, Sanjay Mittal, and Gautam Biswas. "Flow past a square cylinder at low Reynolds numbers." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 67.9 (2011): 1160-1174.

[61] Yin, G., T. Monaci, and M. C. Ong. "Numerical simulation of flow around two 5: 1 rectangular cylinders at a high Reynolds Number." *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 700. No. 1. IOP Publishing, 2019.

7.0 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΚΩΔΙΚΕΣ

7.1 ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΗΣ LAPLACE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
x = 2
y = 2
h = 0.2
px = int(x/h)+1
py = int(y/h)+1
# Δημιουργω έναν ορθογώνιο πίνακα διαστασης nx,ny και αρχικοποιούμε τις τιμές
# με μηδέν
u = np.zeros([px, py])

# Συνοριακές συνθήκες
for j in range(py):
    u[0, j] = 10
for j in range(10):
    u[10, j] = 0
for i in range(1, px):
    u[i, 0] = 10-i
for i in range(1, py):
    u[i, 10] = 10-i
#Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών
for iteration in range(0, 1000):
    for i in range(1, 10):
        for j in range(1, 10):
            u[i, j] = 0.25*(u[i+1, j]+u[i-1, j]+u[i, j+1]+u[i, j-1])
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.imshow(u)
plt.colorbar()
plt.title('Τιμές της Laplace ')

x = np.array(np.arange(0,11,1))
y = np.array(np.arange(0,11,1))
X,Y = np.meshgrid(x,y)
vx,vy = np.gradient(u,edge_order=2)
start = [[0.01,y]for y in np.arange(0,11,1)]
plt.streamplot(X,Y,vx,vy,start_points=start, density=1,arrowstyle='<-'
```

7.2 ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΗΣ LAPLACE ΣΕ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ 4.9-4.12

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
x= 2
y = 3
h = 0.2
px = int(x/h+1)
py = int(y/h+1)
u = np.zeros([px,py])
#Boundary conditions
#Ανω όριο
for j in range(py):
    u[0,j] =10
#Κάτω όριο
for i in range(6,11):
    for j in range(0,6):
        u[i,j]=-1
for i in range(7,11):
    u[i,6]=-1
for i in range(8,11):
    u[i,7]=-1
for i in range(9,11):
    u[i,8]=-1
#Αριστερό όριο:
for i in range(1,6):
     u[i,0]=10-i*2
#Δεξί όριο:
for i in range(1,11):
    u[i,15]=10-i
# Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
for iteration in range(0,1000):
    for i in range(1,10):
        for j in range(1,15):
            if u[i,j] != -1 and u[i+1,j]!=-1 and u[i-1,j]!=-1 and u[i,j-1]!=-
1:
                u[i,j] = 0.25*(u[i+1,j]+u[i-1,j]+u[i,j+1]+u[i,j-1])
for i in range(px):
    for j in range(py):
        if u[i,j]==-1:
            u[i,j]=0
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.imshow(u)
```

```
plt.colorbar()
plt.title('Τιμές της Laplace ')

x = np.arange(0,16,1)
y = np.arange(0,11,1)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
vx = np.gradient(u,axis=1)
vy = np.gradient(u,axis=0)
start = [[0.01,y]for y in np.arange(0,5,1)]
plt.streamplot(X,Y,-vy,vx,start_points= start,minlength=0.8)
```

7.3 ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Rectangle
from math import e
y = 10
x = 20
h = 0.1
px = int(x/h)+1
py = int(y/h)+1
u = np.zeros([py, px])
# #Boundary conditions
# Ανω όριο
for j in range(px):
    u[0, j] = 100
# Κάτω όριο
for j in range(px):
    u[100, j] = 0
    u[50,j]= 50
# Αριστερά όριο
for i in range(0, 100):
    u[i, 0] = 100-i
# Δεξιά όριο
for i in range(0, 100):
    u[i,200]=100-i
for i in range(44, 56):
    for j in range(44, 56):
        u[i, j] = 50
```

```
# αλλάζοντας αυτή την λούπα δημιουργούμε όλα τα σχήματα
for i in range(45, 55):
    for j in range(45, 55):
        u[i, j] = -1
#Λύση
for iteration in range(0, 10000):
    for i in range(1, 100):
        for j in range(1, 200):
            if u[i, j+1] != -1 and u[i+1, j] != -1 and u[i-1, j] != -1 and
u[i, j-1] != -1:
                u[i, j] = 0.25*(u[i+1, j]+u[i-1, j]+u[i, j+1]+u[i, j-1])

for i in range(py):
    for j in range(px):
        if u[i, j] == -1:
            u[i, j] = 0
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.imshow(u)
plt.colorbar()
plt.gca().add_patch(Rectangle((45, 45), 10, 10, facecolor='black',
fill=True))


x = np.arange(0,201)
y = np.arange(0,101)
[X,Y] = np.meshgrid(x,y)
vx,vy = np.gradient(u)
plt.streamplot(x, y, -vx,vy, minlength=1,density=3)
```