ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΕΡΟΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρητικά Στοιχεία Ρευστομηχανικής και Εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική Ανάλυση Ροϊκών Πεδίων

Ανδρέας Ιων Ταμπάκης

Α.Μ. 1051355

Επιβλέπων: Παπαδόπουλος Πολύκαρπος
Επίκουρος Καθηγητής

ΠΑΤΡΑ, Ιούλιος/2022

Η έγκριση της σπουδαστικής εργασίας δεν υποδηλοί την αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Κατά τη συγγραφή τηρήθηκαν οι αρχές της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Θεωρητικά στοιχεία Ρευστομηχανικής και εισαγωγή στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική Ανάλυση ροϊκών πεδίων

Ανδρέας Ταμπάκης

Σε αυτή την εργασία έγινε θεωρητική μελέτη ρευστοδυναμικής και υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις εξισώσεις ρευστοδυναμικής. Γίνονται αναλυτικές αποδείξεις για τις εξισώσεις ορμής, ενέργειας και συνέχειας σε διατηρητική και μη διατηρητική μορφή, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του όγκου ελέγχου και απειροστού στοιχείου αντίστοιχα. Στη συνέχεια έγινε περιγραφή της σημαντικότητας των συνοριακών συνθηκών, του τρόπου επιλογής τους και κατηγοριοποίηση στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που εμφανίζονται στην ρευστομηχανική ανάλογα με τις ιδιότητες του και τα φυσικά φαινόμενα που περιγράφουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Περιγράφεται αναλυτικά η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση παραγώγων με εξισώσεις διαφορών και η μέθοδος πεπερασμένου όγκου για την προσέγγιση ολοκληρωμάτων με μέσες τιμές.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική περιγραφή της αστρόβιλης, ασυμπίεστης και χωρίς ιξώδες ροής η οποία περιγράφεται από την εξίσωση Laplace. Αναλύεται η εμφάνιση της ροϊκής συνάρτησης και η σχέση της με την παροχή.

Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη σε όλα τα παραπάνω.

Λέξεις Κλειδιά: Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών, Μέθοδος Πεπερασμένου, Εξίσωση Laplace, Ροϊκη συνάρτηση

ABSTRACT

Theoretical elements of Fluid Mechanics and introduction to the Computational Fluid Dynamics analysis of the flow fields

Andreas Ion Tabakis

In this dissertation a theoretical study of fluid dynamics and computational fluid dynamics was performed.

The first chapter presents the fundamental equations of fluid dynamics. Detailed proofs are made for the equations of momentum, energy, and continuity in conservative and non-conservative form, using the model of control volume and infinite element respectively. Then, the importance of the boundary conditions was described, namely how these conditions were selected and categorized in the various differential equations that appear in fluid mechanics according to their properties and the physical phenomena that they describe.

The second chapter describes the numerical methods for solving some differential equations. The finite difference method for approximating derivatives with difference equations and the finite volume method for approximating integrals with mean values are described in detail.

The third chapter provides a detailed description of irrotational, compressible and inviscous flow, which is described by the Laplace equation. The appearance of the flow function and its relation to the supply are analyzed.

Finally, in the last chapter a summary of all the above is made.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Finite Volume Method, Laplace Equation, Streamfunction

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- Τελεστής συνήθης διαφόρισης : $\frac{d}{dr}$ όπου $r = x, y, z, t$
- Τελεστής μερικής διαφόρισης: $\frac{\partial}{\partial r} = \partial_r$ όπου $r = x, y, z, t$
- Τελεστής ανάδελτα: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\ \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{z}$
- Τελεστής Laplace:$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- Τελεστής ολοκληρωσης σε καμπύλη $\int_c \ dl$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστή καμπύλη $\oint_c \ dl$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε επιφάνεια: $\iint_s \ dS$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστή επιφάνεια: $\oiint_s \ dS$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε όγκο: $\iiint_V \ dV$
- Τελεστής ολοκλήρωσης σε κλειστό όγκο: $\oiiint_V \ dV$
- Συμβολισμός $O(x^n)$: Οροι τάξης μεγαλύτεροι του n

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ευχαριστήσω το εργαστήριο μηχανικής ρευστών για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως υπολογιστική ρευστοδυναμική ορίζουμε την ανάλυση συστημάτων που περιλαμβάνουν ροή ρευστών, μεταφορά θερμότητας και σχετιζόμενα φαινόμενα όπως οι χημικές αντιδράσεις με την χρήση υπολογιστικών προσομοιώσεων. Η υπολογιστική ρευστοδυναμική καλύπτει ένα πολύ μεγάλο εύρος βιομηχανικών και μη εφαρμογών. Μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- Αεροδυναμική αεροσκαφών και οχημάτων
- Υδροδυναμική πλοίων
- Ροή καυσίμων σε κινητήρες εσωτερικής καύσης
- Χημικές αντιδράσεις όπως ανάμειξη και διαχωρισμός
- Ωκεανογραφία
- Μετερεολογία
- Ιατρική: Μελέτη ροής του αίματος σε αρτηρίες και φλέβες
- Ρευστοδυναμική για την μελέτη αστέρων
- Γεωφυσική

[1]

1.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην υπολογιστική ρευστοδυναμική χρησιμοποιούμε αριθμητικούς αλγόριθμους για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αυτοί οι αλγόριθμοι κωδικοποιούνται σε μια γλώσσα προγραμματισμού και αποτελούνται από 3 βασικά στοιχεία:

1. Προ-επεξεργασία
2. Επίλυση
3. Μετά-επεξεργασία

Προ επεξεργασία: Κατά την προ επεξεργασία ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Καθορίζεται ο υπολογιστικός χώρος, δηλαδή η γεωμετρία της περιοχής που μας ενδιαφέρει. Στην υπόλοιπη εργασία αυτό το βήμα θα αναφέρεται σαν Γεωμετρία του προβλήματος.
- Δημιουργείται η πλεγματική διάταξη, δηλαδή η γεωμετρία του προβλήματος διακριτοποιείται σε κόμβους.
- Επιλέγονται τα φυσικά φαινόμενα που θα μοντελοποιηθούν.
- Εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες στη γεωμετρία του προβλήματος.

Επίλυση: Κατά την επίλυση εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος της επιλογής μας ή η κατάλληλη για το πρόβλημα. Η λύση του προβλήματος ορίζεται σε κάθε κόμβο και η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων που χρησιμοποιούμε στην πλεγματική διάταξη. Όσο περισσότεροι κόμβοι τόσο καλύτερη η λύση, πράγμα που σημαίνει ότι η ακρίβεια της λύσης είναι συνάρτηση της υπολογιστικής ισχύος και του χρόνου που χρησιμοποιούμε.

Μετά-επεξεργασία: Μετά την λύση του προβλήματος, πολύ σημαντική είναι η ανάλυση τον αποτελεσμάτων. Ο καλύτερος τρόπος μελέτης των αποτελεσμάτων είναι η εικονοποιήση αυτών. Συγκεκριμένα:

- Η απεικόνιση της γεωμετρίας του προβλήματος.

- Η απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών πριν την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου.
- Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων, όπως οι τιμές των πεδίων ή οι ροϊκές γραμμές του πεδίου.

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας 2D και 3D γραφικές παραστάσεις, διανυσματικά γραφήματα, ισοσταθμικά γραφήματα και ζωντανά γραφήματα. Για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη matplotlib.[3][4]

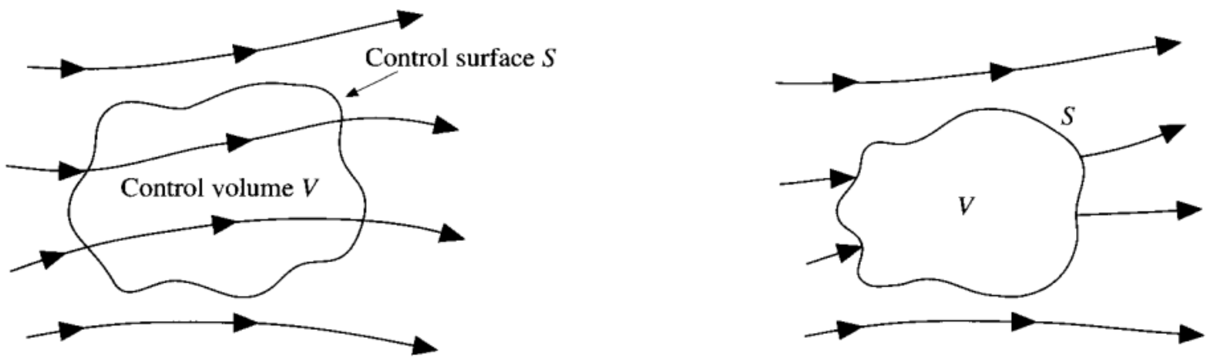
1.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΡΟΗΣ

Η βασικές εξισώσεις κίνησης ενός ρευστού εξάγονται χρησιμοποιώντας:

1. Την θεμελιώδεις αρχές της φυσικής:
    - Διατήρηση της μάζας
    - Δεύτερος Νόμος Νεύτωνα
    - Διατήρηση της Ενέργειας
2. Τα παραπάνω εφαρμόζονται σε ένα μοντέλο ροής
3. Από την εφαρμογή εξάγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό.

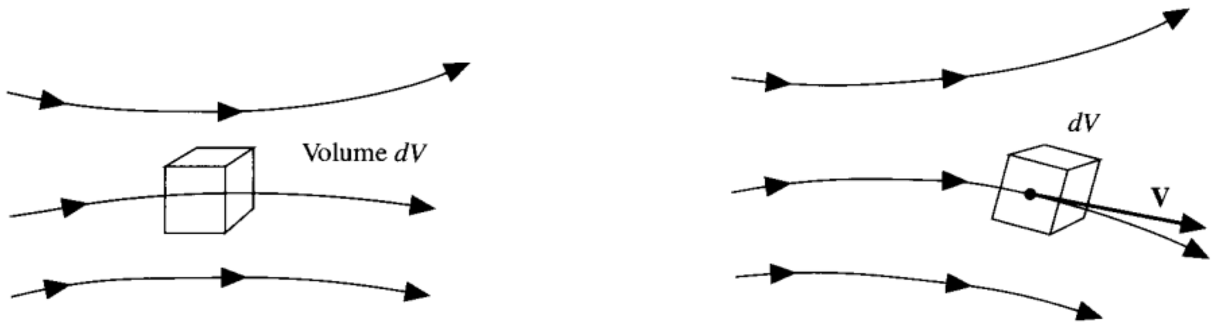
Υπάρχουν 2 μοντέλα ροής. Το μοντέλο ελέγχου πεπερασμένου όγκου και το μοντέλο απειροστού στοιχείου.

Μοντέλο πεπερασμένου όγκου ελέγχου: Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια S, που ονομάζεται επιφάνεια ελέγχου. Αυτή η επιφάνεια κλείνει έναν όγκο του ρευστού V που ονομάζεται όγκος ελέγχου. Οι όγκος ελέγχου μπορεί να είναι σταθερός ή να κινείται μαζί με τα τμήματα του ρευστού. Σε κάθε περίπτωση ο όγκος ελέγχου είναι αρκετά μεγάλος ώστε να περιέχει ένα μεγάλο τμήμα του ρευστού. Οι θεμελιώδεις αρχές εφαρμόζονται στο ρευστό που βρίσκεται μέσα σε αυτόν τον όγκο αντί να εφαρμόζονται σε ολόκληρο το ρευστό και έτσι εξάγονται οι εξισώσεις ροής του ρευστού. Αυτές οι εξισώσεις έχουν ολοκληρωτική μορφή και μπορούν να μετατραπούν σε διαφορικές εξισώσεις. Στην περίπτωση που ο όγκος είναι σταθερός και ρευστό ρέει μέσα από αυτόν αυτές οι εξισώσεις έχουν διατηρητική μορφή, ενώ αν κινείται μαζί με το ρευστό έχουν μη διατηρητική μορφή. [5]



Σχήμα 1.1 Ογκος Ελέγχου

Μοντέλο απειροστού στοιχείου: Θεωρούμε ένα απειροστό στοιχείο ρευστού με πεπερασμένο όγκο $\mathcal{V}$. Αυτό το στοιχείο μπορεί είτε να παραμένει σταθερό και ρευστό να ρέει μέσα από αυτό είτε μπορεί να κινείται μαζί με ένα τμήμα του ρευστού με ταχύτητα **V**. Αντίστοιχα με πριν οι θεμελιώδεις αρχές της φυσικής εφαρμόζονται σε αυτό το στοιχείο και όχι σε όλο το ρευστό έτσι εξάγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την ροή του ρευστού. Αυτές οι εξισώσεις έχουν διαφορική μορφή και αν το απειροστό στοιχείο παραμένει ακίνητο είναι διατηρητικές . Αν το απειροστό στοιχείο κινείται μαζί με το ρευστό τότε οι εξισώσεις είναι μη διατηρητικές. [6]



Σχήμα 1.2 Απειροστό στοιχείο ρευστού

Συγκεκριμένα στο μοντέλο ροής απειροστού στοιχείου, η κίνηση ενός στοιχειώδους στοιχείου του ρευστού περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\mathbf{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} (1.1)$$

Όπου οι συνιστώσες x, y και z της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$u = u(x, y, z, t) (1.2)$$

$$v = v(x, y, z, t) (1.3)$$

$$w = w(x, y, z, t) (1.4)$$

Και η πυκνότητα δίνεται από την σχέση

$$\rho = \rho(x, y, z, t) (1.5)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα σε ένα σημείο (x_1, y_1, z_1) μια χρονική στιγμή t_1 είναι $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1)$ και σε μια ύστερη χρονική στιγμή t_2 το απειροστό στοιχείο βρίσκεται στο σημείο (x_2, y_2, z_2) με πυκνότητα $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2)$. Αφού η πυκνότητα είναι μια εξίσωση χωρικών και χρονικών μεταβλητών, τότε μπορούμε να την γράψουμε χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα taylor ως:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + O(\mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\iota\ \acute{o}\rho o\iota)(1.6)$$

Διαιρώντας με $t_2 - t_1$ και αγνοώντας του όρους μεγαλύτερης τάξης

$$\rho_2 - \rho_1 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1 \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1 \frac{y_1 - y_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1 \frac{z_1 - z_2}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1 (1.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση, στο όριο $t_1 = t_2$ περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας καθώς το ρευστό κινείται. Δηλαδή τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας ενός απειροστού στοιχείου καθώς κινείται.

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt} (1.8)$$

Αντίστοιχα

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u(1.9)$$

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v(1.10)$$

$$lim_{t_1 \to t_2} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w(1.11)$$

Συνοψίζοντας τις παραπάνω εξισώσεις

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} (1.12)$$

Ο όρος $\frac{D}{Dt}$ περιγράφει το ρυθμό μεταβολής ακολουθώντας ένα απειροστό σημείο και ονομάζεται ολική παράγωγος, ενώ ο όρος $\frac{\partial}{\partial t}$ ονομάζεται τοπική παράγωγος, που είναι ο ρυθμός μεταβολής σε ένα σταθερό σημείο και ο όρος $u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{V} \cdot \nabla$ ονομάζεται διατηρητική παράγωγος και περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής λόγω της κίνησης ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού από ένα σημείο σε ένα άλλο.

Η κλίση της ταχύτητας είναι ένας όρος που εμφανίζεται πολύ συχνά στις εξισώσεις ρευστομηχανικής. Εστω ένας όγκος ελέγχου που κινείται μαζί με το ρευστό, μέσα σε αυτόν τον όγκο υπάρχει σταθερή ποσότητα ρευστού οπότε η μάζα του παραμένει σταθερή και αναλλοίωτη στον χρόνο. Όμως ο όγκος $\mathcal{V}$ και η επιφάνεια ελέγχου μεταβάλλονται καθώς κινείται σε διαφορετικές περιοχές ροής, όπου υπάρχει διαφορετική πυκνότητα. Αρα ο όγκος ελέγχου και το σχήμα του, είναι ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής. Ένα απειροστό στοιχείο της επιφάνειας dS κινείται με τοπική ταχύτητα **V,** η αλλαγή του όγκου ελέγχου dV κατά την μετατόπιση της επιφάνειας dS σε χρόνο dt είναι ίση με την επιφάνεια ενός κυλίνδρου με βάση dS και ύψος $(\mathbf{V} \cdot \Delta t) \cdot \boldsymbol{n}$ όπου n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια

$$d\mathcal{V} = [(\mathbf{V} \cdot \Delta t) \cdot n]dS = (V\Delta t) \cdot dS (1.13)$$

Η συνολική αύξηση όλου του όγκου ελέγχου είναι ίση με το άθροισμα της παραπάνω σχέσης πάνω στην επιφάνεια ελέγχου. Στο όριο $dS \rightarrow 0$ το άθροισμα γίνεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int\int_{S} (V\Delta t) \cdot dS (1.14)$$

Αν το παραπάνω διαιρεθεί με Δt, το αποτέλεσμα είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ελέγχου,

$$\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \frac{1}{\Delta t}\int\int_{S} (v\Delta t) \cdot dS = \int\int_{s} v \cdot dS (1.15)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης

$$\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \int\int\int_{v} (\nabla \cdot V) d\mathcal{V} (1.16)$$

Εστω ότι ο όγκος ελέγχου γίνεται απειροστά μικρός $\delta\mathcal{V}$

$$\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt} = \int\int\int_{v} (\nabla \cdot V) d\mathcal{V} (1.17)$$

$$\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt} = (\nabla \cdot V)\delta\mathcal{V} (1.18)$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{\delta\mathcal{V}} \frac{\mathrm{D}(\delta\mathcal{V})}{Dt} (1.19)$$

Από την παραπάνω σχέση καταλαβαίνουμε ότι η φυσική έννοια του $\nabla \cdot V$ είναι ο ρυθμός μεταβολής όγκου του κινούμενου στοιχείου ρευστού ανά μονάδα όγκου.

1.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Η βασική αρχή που θα χρησιμοποιηθεί είναι η διατήρηση της μάζας. Σαν μοντέλο ροής θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο ελέγχου πεπερασμένου όγκου σε σταθερό σημείο. Η διατήρηση της μάζας μας λέει ότι η ροή μάζας που βγαίνει έξω από τον όγκο ελέγχου μέσα από μια επιφάνεια S είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου. Η ροή μάζας μέσα από την επιφάνεια dS είναι

$$\rho V \cdot dS (1.20)$$

Σαν σύμβαση θα θεωρήσουμε ότι το κάθετο διάνυσμα dS έχει πάντα φόρα έξω από την επιφάνεια. Αν η ποσότητα $\rho V \cdot dS$ είναι θετική υπάρχει ροή μάζας προς τα έξω, ενώ αν είναι αρνητική ροή μάζας προς τα μέσα. Η συνολική μάζα που βγαίνει προς τα έξω δίνεται από την σχέση

$$\int \int_S \rho V \cdot dS (1.21)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\int \int \int_V \nabla \cdot (\rho V) d\mathcal{V} = \int \int_S \rho V \cdot dS$$

Η συνολική μάζα μέσα στον όγκο ελέγχου δίνεται από την σχέση

$$\int \int \int_V \rho d\mathcal{V} (1.22)$$

και ο ρυθμός μεταβολής από την σχέση

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{V}\rho d\mathcal{V}(1.23)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις

$$\int\int\int_{V}\nabla\cdot(\rho V)d\mathcal{V}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{V}\rho d\mathcal{V}(1.24)$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho V)=0}(1.25)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση της συνέχειας. Επειδή ο όγκος ελέγχου παραμένει σταθερός η παραπάνω εξίσωση είναι διατηρητική.

Εστω το μοντέλο απειροστού στοιχείου που κινείται μαζί με την ροή. Το απειροστό στοιχείο ρευστού έχει σταθερή μάζα δm, αλλά το σχήμα του και ο όγκος $\delta\mathcal{V}$ του μπορούν να μεταβληθούν κατά την κίνηση του.

$$\frac{D(\delta m)}{Dt}=0\quad(1.26)$$

Αντικαθιστώντας $\delta m=\rho\delta\mathcal{V}$

$$\frac{D(\rho\delta\mathcal{V})}{Dt}=\delta\mathcal{V}\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt}=0$$

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left[\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\frac{D(\delta\mathcal{V})}{Dt}\right]=0\quad(1.27)$$

Και αντικαθιστούμε την εξίσωση (1.19)

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot v = 0} (1.29)$$

Αυτή είναι η μη διατηρητική διαφορική μορφή της εξίσωσης συνέχειας.

Χρησιμοποιώντας τα μοντέλα ροής προκύπτουν 4 εξισώσεις που περιγράφουν την συνέχεια, 2 διατηρητικές και 2 μη διατηρητικές. Στην κάθε περίπτωση η μια είναι ολοκληρωτική και η άλλη διαφορική. Αυτές οι εξισώσεις δεν είναι διαφορετικές, αλλά διαφορετικές μορφές της ίδιας εξίσωσης. [7]

1.4 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Σε αυτή την περίπτωση περιοριζόμαστε στο μοντέλο απειροστού στοιχείου του ρευστού που κινείται. Σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μια απειροστή μάζα και θα ασχοληθούμε, προς το παρόν, μόνο με τον άξονα x.

$$F_x = ma_x (1.30)$$

Υπάρχουν 2 είδη δυνάμεων που μελετάμε, οι δυνάμεις σώματος και οι δυνάμεις επιφάνειας.

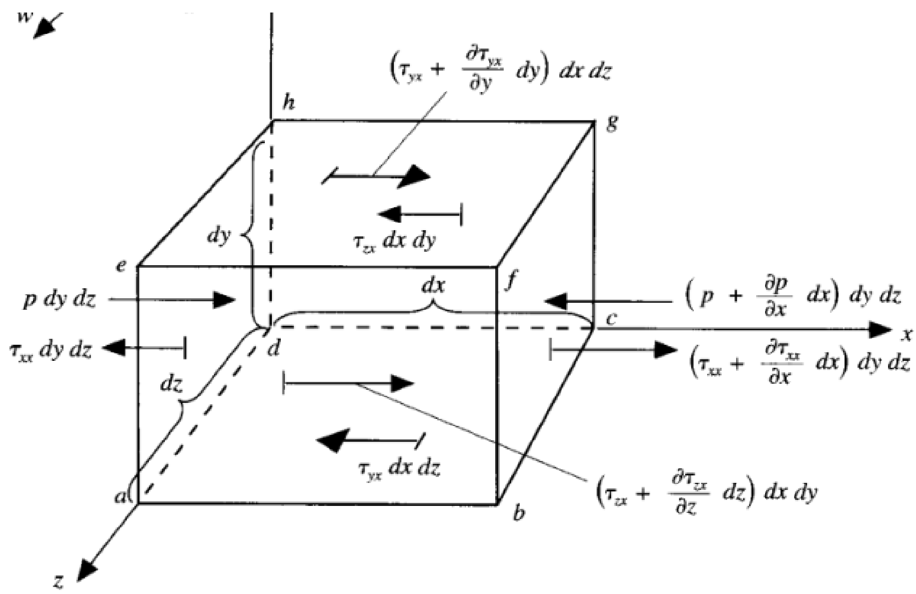
- Δυνάμεις Σώματος: Είναι οι δυνάμεις που ασκούνται απευθείας σε έναν όγκο του σώματος και είναι δυνάμεις που δρουν από απόσταση. Τέτοιες δυνάμεις είναι βαρυτικές, ηλεκτρικές και μαγνητικές.

- Δυνάμεις επιφάνειας: Είναι οι δυνάμεις που δρουν απευθείας στην επιφάνεια του ρευστού. Υπάρχουν 2 πηγές που δημιουργούν αυτές τις δυνάμεις, η κατανομή πίεσης στην επιφάνεια του ρευστού που δημιουργείται από το ρευστό που βρίσκεται γύρω από το απειροστό στοιχείο και οι δυνάμεις διάτμησης. Οι διατμητικές δυνάμεις περιγράφονται από τανυστές και χωρίζονται σε διατμητικές τάσης τ_{ij} που περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής διατμητικής παραμόρφωση ενός απειροστού τμήματος του ρευστού και κανονικές τάσης τ_{ii} που περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής του απειροστού τμήματος του ρευστού.

Οι δυνάμεις σώματος ανά μονάδα μάζας κατά τον άξονα x που ασκείται σε ένα απειροστό στοιχείο ρευστού ως

$$\rho f_x dxdydz (1.31)$$

Οι διατμητικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στοιχείο του ρευστού φαίνονται το παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.3 Δυνάμεις σε στοιχειώδες ρευστό

Η συνολική επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα μάζας που ασκείται κατά τον άξονα x είναι

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\right] dydz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right) - \tau_{xx}\right] dydz$$
$$+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dydz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) - \tau_{zx}\right] dxdy (1.32)$$

Η συνολική δύναμη ανά μονάδα μάζας στον άξονα x δίνεται από το άθροισμα των 2 παραπάνω

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f_x dxdydz (1.33)$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$F_x = ma_x \Rightarrow \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f_x dxdydz = \rho dxdydz \frac{Du}{Dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right]+\rho f_x=\rho\frac{Du}{Dt}}(1.34)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της ορμής για ιξώδης ροή. Με την ίδια λογική η εξίσωση της ορμής για τους υπόλοιπους άξονες γράφεται ως

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho f_y=\rho\frac{Dv}{Dt}}(1.35)$$

$$\boxed{\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f_z=\rho\frac{Dw}{Dt}}(1.36)$$

Αφού αυτές οι εξισώσεις δημιουργήθηκαν με βάση το μοντέλο του στοιχειώδους ρευστού, έχουν μη διατηρητική μορφή και ονομάζονται εξισώσεις Navier Stokes. Οι εξισώσεις Navier Stokes μπορούν να γραφτούν και σε διατηρητική μορφή γράφοντας το δεξί μέλος χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ολικής παραγώγου.

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho V\cdot\nabla u(1.37)$$

Ανοίγοντας της παράγωγο

$$\rho\frac{d(\rho u)}{dt}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial t}\Rightarrow u\frac{\partial \rho}{\partial t}=\rho\frac{d(\rho u)}{dt}-u\frac{\partial \rho}{\partial t}(1.39)$$

Και χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho V\cdot\nabla u=\nabla\cdot(\rho uV)-u\nabla\cdot(\rho V)(1.40)$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.37) τις εξισώσεις (1.39) και (1.40)

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\frac{d(\rho u)}{dt}-\ u\frac{\partial \rho}{\partial t}-\ \nabla\cdot(\rho uV)+u\nabla\cdot(\rho V)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho uV)(1.50)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω οι εξισώσεις Navier Stokes σε διατηρητική μορφή γράφονται ως:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho uV\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]+\rho f_x\right)=}\ (1.51)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho vV)=\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho f_y}(1.52)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho wV)=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f_z}(1.51)$$

Για Νευτώνεια ρευστά οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες της κλίσης της ταχύτητας

$$\tau_{xx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\,(1.52)$$

$$\tau_{yy}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial v}{\partial x}\,(1.53)$$

$$\tau_{zz}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\frac{\partial w}{\partial x}\,(1.54)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right\}(1.55)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right](1.56)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\lambda(\nabla\cdot V)+2\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\right](1.57)$$

Όπου μ είναι ο συντελεστής μοριακού ιξώδους και λ ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους.

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω οι εξισώσεις Navier Stokes γράφονται ως

- $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x (1.58)$

- $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \rho f_y (1.59)$

- $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \rho f_z (1.60)$

[8]

1.5 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την θεμελιώδη αρχή διατήρησης της ενέργειας στο μοντέλο του απειροστού στοιχείου ρευστού που κινείται με την ροή. Η εξίσωση της ενέργειας θα εξαχθεί υπολογίζοντας κάθε όρο από τον θεμελιώδη νόμο της θερμοδυναμικής

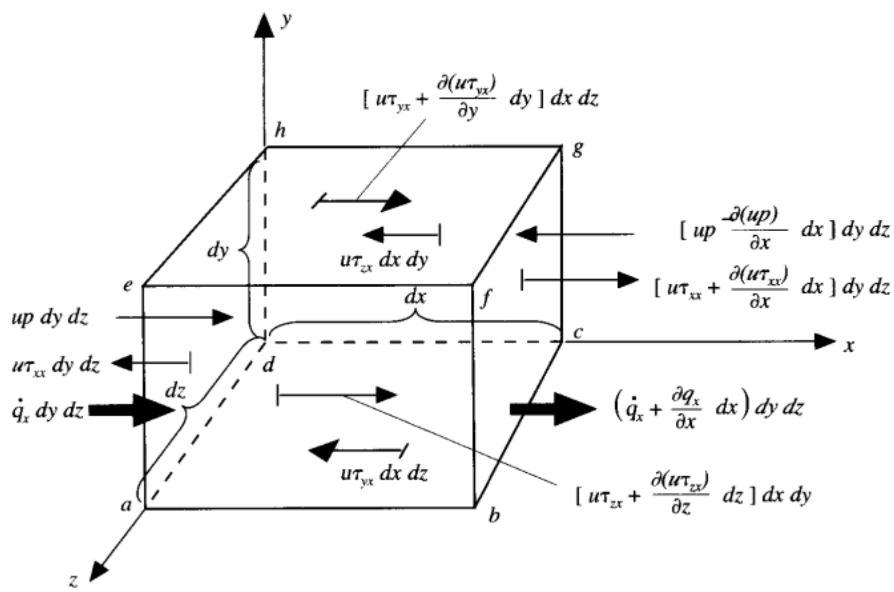
$$dU = dQ + dW (1.61)$$

όπου U, Q,W η εσωτερική ενέργεια, η θερμότητα και το έργο αντίστοιχα.

Υπολογισμός έργου: Ο ρυθμός παραγωγής έργου από δυνάμεις σώματος σε ένα απειροστό στοιχείο του ρευστού που κινείται με ταχύτητα **V** είναι:

$$\rho f \cdot V(dxdydz)(1.62)$$

Για τις δυνάμεις επιφάνειας και την θερμική αγωγιμότητα όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα έχουμε:



Σχήμα 1.4 Επιφανειακές δυνάμεις και θερμική αγωγιμότητα

Το συνολικό έργο δίνεται από την σχέση

$$dW = -\left[\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z} + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f \cdot V dxdydz (1.63)$$

Υπολογισμός Θερμότητας: Η ροή θερμότητας προέρχεται από ογκομετρική θέρμανση, όπως απορρόφηση ή εκπομπή ακτινοβολίας και από μεταφορά θερμότητας από την επιφάνεια λόγω θερμικής αγωγιμότητας (κλίση θερμοκρασίας). Ορίζοντας ως $\dot{q}$ τον ρυθμό αύξησης της ογκομετρικής θερμότητας ανά μονάδα μάζας, η ογκομετρική θερμότητα του απειροστού στοιχείου είναι

$$\rho\dot{q}dxdydz$$

Και η θέρμανση του απειροστού στοιχείου του ρευστού λόγω θερμικής αγωγιμότητας είναι

$$-\left(\frac{\partial \dot{q_x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q_y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q_z}}{\partial z}\right) dxdydz (1.64)$$

Ο νόμος του Fourier για την θερμική αγωγιμότητα, μας λέει ότι είναι ανάλογή της βάθμωσης της τοπικής θερμοκρασίας

$$\dot{q_x} = -k\frac{\partial T}{\partial x} (1.65)$$

$$\dot{q_y} = -k\frac{\partial T}{\partial y} (1.66)$$

$$\dot{q_z} = -k\frac{\partial T}{\partial z} (1.67)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\boxed{dQ = \left[\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] dxdydz} (1.68)$$

Εσωτερική Ενέργεια: Η εσωτερική ενέργεια προέρχεται από 2 συνεισφορές, από την ενέργεια λόγω της κίνησης των μορίων και την κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης του ρευστού.

$$dU = \rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) dxdydz (1.69)$$

Εξίσωση Ενέργειας

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στον θεμελιώδη νόμο της θερμοδυναμικής, βρίσκουμε την εξίσωση θερμότητας στη μη διατηρητική της μορφή :

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (1.60)$$

Για να προκύψει η διατηρητική μορφή αυτής της εξίσωσης αντικαθιστούμε:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)V\right] (1.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V\right]=$$

$$=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+\left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(wp)}{\partial z}\right)+\frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{u\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{v\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{v\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{w\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{w\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f\cdot V(1.62)$$

[9]

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στα 3 παραπάνω κεφάλαια, οι εξισώσεις που διέπουν την θερμοδυναμική είναι οι

- **Διατηρητική Μορφή** :

  1. Εξίσωση Συνέχειας:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0(1.63)$$

  2. Εξισώσεις ορμής:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho uV)=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]+\rho f_\chi}(1.64)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho vV)=\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho f_y}(1.65)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho wV)=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f_z}(1.66)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας:

$$\frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V\right]=$$

$$=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+\left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(wp)}{\partial z}\right)+\frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{u\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{v\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{v\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{w\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{w\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f\cdot V(1.67)$$

- **Μη διατηρητική μορφή:**

1. Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot v=0(1.68)$$

2. Εξισώσεις ορμής

$$\boxed{\rho\frac{\partial Du}{\partial t}=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]+\rho f_{\chi}}(1.69)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dv}{\partial t}=\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho f_{y}}(1.70)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dw}{\partial t}=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f_{z}}(1.71)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=$$

$$=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+\left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(wp)}{\partial z}\right)+\frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{u\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{v\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{v\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{w\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{w\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho f\cdot V(1.72)$$

Μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει τους όρους διατηρητική και μη διατηρητική χωρίς να τους εξηγήσουμε. Ο διαχωρισμός σε διατηρητικές και μη διατηρητικές εξισώσεις έχει να κάνει με το υπολογιστικό μέρος της ρευστομηχανικής και όχι με το θεωρητικό. Οι διατηρητικές μορφές των εξισώσεων προσφέρουν μια ευκολία σε ένα υπολογιστικό σύστημα αφού, όλες οι εξισώσεις σε διατηρητική μορφή μπορούν να εκφραστούν από την ίδια εξίσωση. Κάτι που βοηθάει στο να απλοποιήσουμε και να οργανώσουμε την λογική που θέλουμε να δώσουμε σε ένα υπολογιστικό πρόγραμμα. Παρατηρούμε ότι όλες οι εξισώσεις στην διατηρητική μορφή τους περιέχουν το θεώρημα της απόκλισης, αυτή οι όροι περιέχουν την ροή μια ποσότητας.

- Ροή μάζας ρV
- Ροή ορμής κατά τον άξονα x $\rho u V$
- Ροή ορμής κατά τον άξονα y $\rho u V$
- Ροή ορμής κατά τον άξονα z $\rho u V$
- Ροή εσωτερικής ενέργειας $\rho e V$

- Ροή συνολικής ενέργειας $\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)V$

Παρατηρώντας όλες τις διατηρητικές εξισώσεις βλέπουμε ότι μπορούμε να τις γράψουμε σαν μια εξίσωση ως

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}=J \quad (1.73)$$

Όπου

$$U=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right)(1.74)$$

$$F=\left(\rho u,\rho u^2+p+\tau_{xx},\rho vu-\tau_{xy},\rho wu-\tau_{xz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)u+pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}-w\tau_{xz}\right)(1.75)$$

$$G=\left(\rho v,\rho uv-\tau_{yx},\rho v^2+p-\tau_{yy},\rho wv-\tau_{yz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)u+pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\tau_{yz}-v\tau_{yy}-w\tau_{yz}\right)(1.76)$$

$$H=\left(\rho w,\rho uw-\tau_{zx},\rho vw-\tau_{zy},\rho w^2+p\tau_{zz},\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)w+pw-k\frac{\partial T}{\partial z}-u\tau_{zx}-v\tau_{zy}-w\tau_{zz}\right)(1.77)$$

$$J=\left(0,\rho f_x,\rho f_y,\rho f_z,\rho\left(uf_x+vf_y+wf_z\right)+\rho\dot{q}\right)(1.78)$$

Οι όροι F, G, H ονομάζονται όροι παροχής και το J όρος πηγής, όπου είναι μηδέν αν οι δυνάμεις σώματος και η ογκομετρική θέρμανση είναι αμελητέες. [10]

1.6 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν πλήρως την ροή ρευστών. Αυτές οι εξισώσεις είναι ίδιες είτε μελετάμε την ροή σε ένα αεροπλάνο, σε ένα σκάφος, υπερηχητική ή υποηχητική, με ιξώδες ή χωρίς κτλ. Η διαφορά προκύπτει από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα. Οι εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας είναι διαφορικές εξισώσεις άρα η ειδική λύση τους, δηλαδή η λύση του πραγματικού προβλήματος που μας ενδιαφέρει, εξαρτάται από τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται με βάση φυσικές υποθέσεις που μπορούν να γίνουν στα σύνορα του προβλήματος, μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- Αν έχουμε ιξώδη ροή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στρώματα του ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με την επιφάνεια έχουν σχετική ταχύτητα ως προς την επιφάνεια μηδέν.
- Αν τα τοιχώματα στα οποία βρίσκεται το ρευστό έχουν θερμοκρασία T τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στρώμα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με αυτά έχει την ίδια θερμοκρασία.

- Αν η θερμοκρασία του ρευστού αλλάζει στα σύνορα της επιφάνειας τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και η θερμοκρασία του στρώματος του ρευστού που είναι σε επαφή με αυτή αλλάζει με τον ίδια τρόπο.
- Για ροή χωρίς ιξώδες η ταχύτητα του ρευστού στα τοιχώματα μπορεί να θεωρηθεί πεπερασμένη.

Στην υπολογιστική ρευστομηχανική πρέπει να γίνεται σωστή εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών ώστε τα αποτελέσματα μια προσομοίωσης να πλησιάζουν την πραγματικότητα. [11],[12]

1.7 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να είναι πολύ διαφορετική ανάλογα με την περιοχή και με τις συνθήκες που λύνεται. Από το προηγούμενο κεφάλαιο παρατηρούμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ρευστών είναι γραμμικές και πολλαπλασιασμένες με σταθερούς συντελεστές, τέτοια συστήματα ονομάζονται οιονεί στατικά. Όπως φαίνεται για ροή χωρίς ιξώδες οι εξισώσεις είναι πρώτης τάξης και γραμμικές, ενώ για ροή με ιξώδες οι διαφορικές εξισώσεις είναι δεύτερης τάξης και γραμμικές. Οι οιονεί μερικές διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται σε 3 κατηγορίες

- Υπερβολικές

- Παραβολικές
- Ελλειπτικές

[13]

Κάθε ένα είδος από τις παραπάνω έχει μια διαφορετική μαθηματική συμπεριφορά, άρα περιγράφει και ένα διαφορετικό φυσικό φαινόμενο. Μια μερική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται με τον εξής τρόπο, στην πιο γενική περίπτωση που είναι δεύτερης τάξης

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+b(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x^2}+c(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+d(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+d(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}$$
$$+f(x_1,x_2)u=g(x_1,x_2) \quad (1.79)$$

Ορίζουμε την ποσότητα $\Delta\ =\ b^2-4ac$, αν :

- Δ= 0 η διαφορική ονομάζεται παραβολική
- Δ< 0 η διαφορική ονομάζεται ελλειπτική
- Δ> 0 η διαφορική ονομάζεται υπερβολική

Υπερβολικές εξισώσεις:

Χρησιμοποιώντας υπερβολικές εξισώσεις περιγράφουμε σταθερή υπερηχητική ροή χωρίς ιξώδες και ασταθής ροή χωρίς ιξώδες.

- **Σταθερή υπερηχητική ροή χωρίς ιξώδες:** Περιγράφεται από τις σταθερές εξισώσεις Euler όπου η ροή είναι υπερηχητική παντού. Ένα παράδειγμα τέτοιας ροής είναι η σταθερή υπερηχητική ροή γύρω από ένα airfoil.

- **Ασταθής ροή χωρίς ιξώδες:** Περιγράφονται από τις εξισώσεις Euler για ασταθή ροή ανεξάρτητα με το αν η ροή είναι υπερηχητική ή όχι. Μερικά παραδείγματα τέτοια ροής είναι η μονοδιάστατη κίνηση κύματος σε έναν αγωγό και η δισδιάστατη κίνηση γύρω από ένα airfoil.

Παραβολικές εξισώσεις:

Χρησιμοποιώντας παραβολικές εξισώσεις μπορούμε να περιγράψουμε ροή με σταθερά στρώματα, παραβολική ιξώδης ροή και ασταθής θερμική αγωγιμότητα.

- **Ροή με σταθερά στρώματα:** Σε αυτή την προσέγγιση χωρίζουμε το ρευστό σε 2 περιοχές. Ένα λεπτό στρώμα, που ονομάζεται συνοριακό στρώμα, βρίσκεται κοντά στην συνοριακή επιφάνεια, όπου εκεί μελετώνται τα φαινόμενα τριβής και όλο το υπόλοιπο ρευστό θεωρείται ότι ρέει χωρίς ιξώδες. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το συνοριακό στρώμα είναι παραβολικές.
- **Παραβολική ιξώδης ροή:** Σε αυτή την προσέγγιση θεωρούμε ότι το συνοριακό στρώμα που περιέχει τα φαινόμενα με ιξώδες είναι πεπερασμένο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η υπερηχητική ροή γύρω από μυτερό σώμα.
- **Ασταθής θερμική αγωγιμότητα:** Εστω ένα σταθερό ρευστό που η θερμότητα μεταφέρεται μέσω θερμικής αγωγιμότητας. Επίσης θεωρούμε ότι η κλίση της θερμότητας αλλάζει σαν συνάρτηση με τον χρόνο, δηλαδή η τιμή της θερμοκρασίας στα τοιχώματα

είναι χρονοεξαρτώμενη. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την θερμότητα είναι χρονοεξαρτημένες.

Ελλειπτικές Εξισώσεις: Η πληροφορία που μεταφέρουν οι ελλειπτικές εξισώσεις διαδίδεται στον χώρο και η λύση τους σε μια περιοχή εξαρτάται μόνο από τις τιμές στα σύνορα. Αν καθορίζονται οι τιμές της λύσης στα σύνορα οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται Dirichlet, αν καθορίζονται οι τιμές της παραγώγου της λύσης στα σύνορα ονομάζονται Newmann και αν είναι μικτές Robin. Χρησιμοποιώντας ελλειπτικές εξισώσεις μπορούμε να περιγράψουμε σταθερή, υποηχητική ροή χωρίς ιξώδες και ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες.

- **Σταθερή, υποηχητική ροή χωρίς ιξώδες:** Το βασικό σημείο αυτής της προσέγγισης είναι ότι η ροή είναι υποηχητική. Στην υποηχητική ροή οι ροϊκές γραμμές ανοίγουν πριν πλησιάσουν το σώμα και κλείνουν αφού το περάσουν.
- **Ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες:** Η ασυμπίεστη ροή χωρίς ιξώδες είναι μια οριακή περίπτωση της υποηχητικής ροής καθώς ο αριθμός Mach, ο οποίος ορίζεται ως ταχύτητα του σώματος/ ταχύτητα του ήχου, τείνει στο μηδέν.

Συνοψίζοντας οι 3 κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με την φυσική σημασία τους ονομάζονται:

- Ελλειπτικές= Κυματικές εξισώσεις αφού περιγράφουν φαινόμενα διάδοσης .
- Παραβολικές = Εξισώσεις θερμότητα αφού περιγράφουν φαινόμενα που σχετίζονται με την διάδοση της θερμότητας.

- Υπερβολικές= Εξισώσεις Laplace, περιγράφουν φαινόμενα που οι λύση τους εξαρτάται μόνο από την τιμή στα σύνορα.

[14], [15]

2.0 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βασική αρχή κάθε αριθμητικής μεθόδου είναι το μοντέλο που χρησιμοποιείται, δηλαδή μια διαφορική εξίσωση και κάποιες συνοριακές συνθήκες ανάλογα με την εφαρμογή που θέλουμε να γίνει. Το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να εξαρτάται από το είδος της ροής και από τις διαστάσεις του προβλήματος. Μετά από την επιλογή του μοντέλου επιλέγουμε την μέθοδο διακριτοποιήσης. Δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσουμε μια διαφορική εξίσωση με αλγεβρικές εξισώσεις διαφορών. Υπάρχουν πολλοί τρόποι διακριτοποίησης, μερικοί από τους πιο γνωστούς είναι:

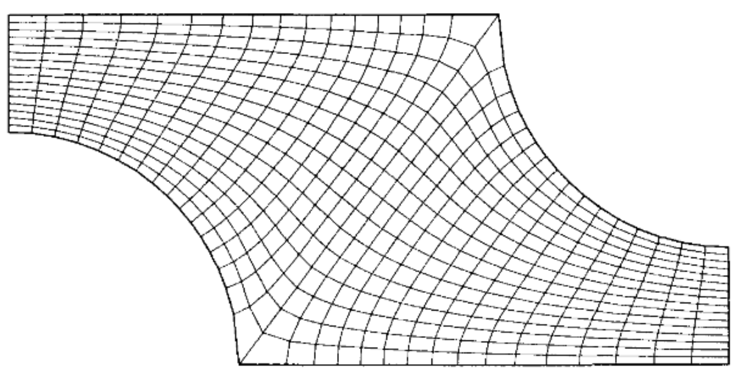
- Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Η μέθοδος πεπερασμένου όγκου
- Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Κάθε μέθοδος όταν εφαρμοστεί σωστά θα πρέπει να δίνει σωστά αποτελέσματα, αλλά ανάλογα το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε κάποιες μπορεί να είναι προτιμητέες.

Κατά την διακριτοποίηση επιλέγονται διακριτά σημεία στα οποία υπολογίζεται η λύση. Το σύνολο αυτών των σημείων ονομάζεται πλεγματική διάταξη (grid) και χωρίζει τον χώρο σε πολλούς υπόχωρους (διακριτά σημεία, διακριτοί όγκοι, διακριτά στοιχεία κτλ). Η μορφή της πλεγματικής διάταξης έχει μεγάλη σημασία κατά τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Μερικές μορφές πλεγματικής διάταξης είναι οι εξής:

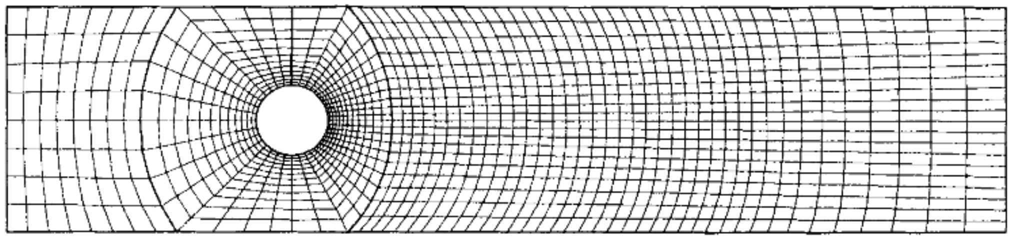
- **Δομημένη πλεγματική διάταξη**: Η κανονική ή αλλιώς δομημένη πλεγματική διάταξη περιέχει ένα σύνολο από πλεγματικές γραμμές που συνδυάζονται κατάλληλα ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Κάθε σημείο στον χώρο προσδιορίζεται από κάποιους δείκτες ανάλογα με τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Η απλή συνδεσμολογία των σημείων με τα γειτονικά τους προσφέρει απλότητα στον προγραμματισμό των προβλημάτων, από την άλλη η μεγάλη απλότητα της διάταξης δεν αφήνει πολλά περιθώρια για την επίλυση δύσκολών προβλημάτων σε περίεργες γεωμετρίες. Τα δομημένα πλέγματα χωρίζονται σε γνωστές κατηγορίες H, O και C ανάλογα με το είδος σύνδεσης των πλεγματικών γραμμών.

    1. **Τύπος H**: περιέχει πλεγματική διάταξη που αν απεικονιστεί σε ένα ορθογώνιο όλα τα γειτονικά σημεία ισαπέχουν.



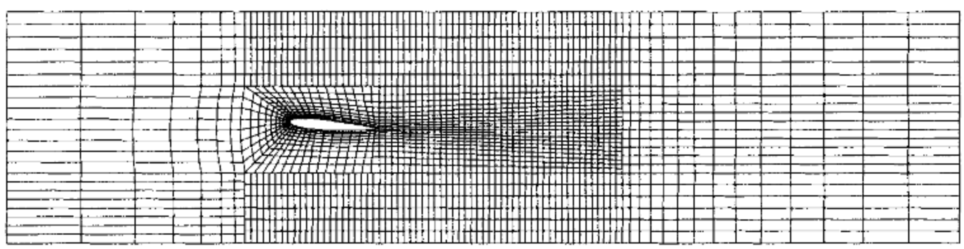
Σχήμα 2.1 Η πλεγματική διάταξη

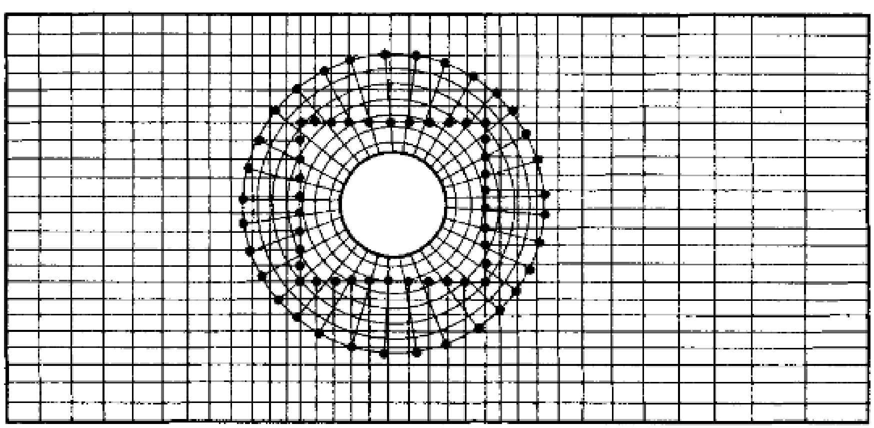
    2. **Τύπος O:** Ο τύπος O περιγράφει μια πλεγματική διάταξη γύρω από ένα κύλινδρο



Σχήμα 2.2 O πλεγματική διάταξη

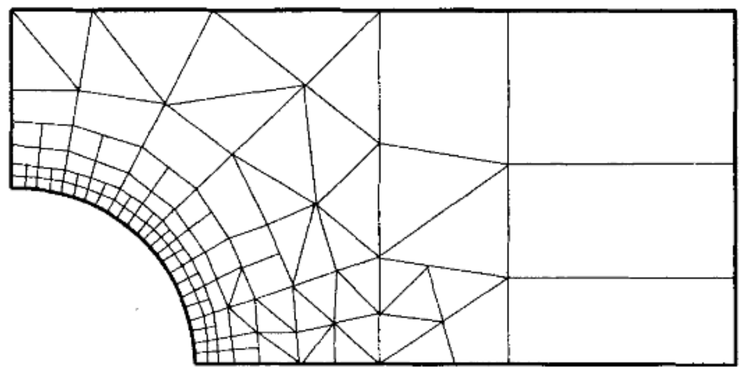
3. **Τύπος C:** Ο τύπος C είναι οι πλεγματικές διατάξεις που έχουν διαφορετικές αποστάσεις τα πλεγματικά σημεία ανάλογα με την περιοχή που βρίσκονται.





Σχήματα 2.3-2.4 C πλεγματική διάταξη

- **Μη δομημένη πλεγματική διάταξη:** Αυτό ο τρόπος διακριτοποίησης εφαρμόζεται σε δύσκολες γεωμετρίες και συνήθως εφαρμόζονται στις μεθόδους πεπερασμένου όγκου και πεπερασμένων στοιχείων. Συνήθως τα πλέγματα δημιουργούν τρίγωνα στις 2 διαστάσεις και τετράεδρα στις 3.



Σχήμα 2.5 Μη δομημένη πλεγματική διάταξη

Αφού γίνει η επιλογή της πλεγματικής διάταξης, πρέπει να γίνει η επιλογή των προσεγγίσεων που θα γίνουν κατά την διαδικασία διακριτοποίησης. Αν χρησιμοποιήσουμε τις πεπερασμένες διαφορές πρέπει να γίνει προσέγγιση των παραγώγων στα πλεγματικά σημεία, στην μέθοδο πεπερασμένου όγκου γίνεται επιλογή του τρόπου προσέγγισης επιφανειακών και χωρικών ολοκληρωμάτων και στην μέθοδο πεπερασμένου στοιχείου γίνεται επιλογή του σχήματος των στοιχείων και των συναρτήσεων βάρους.

Η διακριτοποίηση δημιουργεί ένα σύνολο εξισώσεων οπότε θα πρέπει να γίνει επιλογή της μεθόδου που θα λυθούν όλες αυτές, η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από το είδος του προβλήματος και την πλεγματική διάταξη. Τέλος, αφού επιλέξουμε τα κατάλληλα εργαλεία από όλα τα παραπάνω πρέπει να ελέγξουμε το πότε η λύση μας είναι σωστή. Δηλαδή το πότε υπάρχει σύγκλιση.

[16], [17]

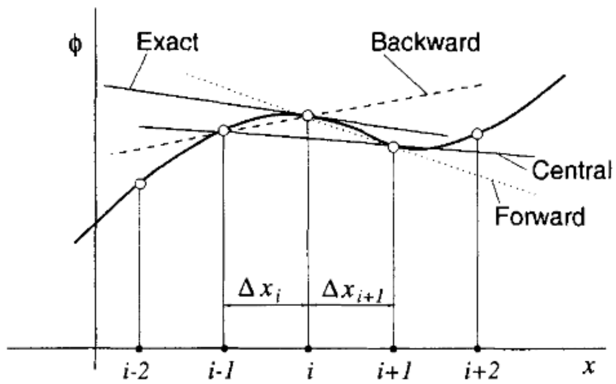
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η βασική ιδέα για την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας του προβλήματος. Η διακριτοποίηση συνήθως έχει τοπική δομή, δηλαδή δημιουργείται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ακολουθεί την μορφή του. Αυτό σημαίνει ότι 2 πλεγματικές γραμμές ανήκουν σε διαφορετικές οικογένειας καμπυλών $\xi_1 = σταθερό, \xi_2 = σταθερό$ και τέμνονται μόνο μια φορά σε κάθε πλεγματικό σημείο.

Η ιδέα των πεπερασμένων διαφορών βασίζεται στον ορισμό της παραγώγου:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Όπου η γεωμετρική απεικόνιση της παραγώγου είναι η εφαπτόμενη της καμπύλης σε ένα σημείο, αυτή μπορούμε να την προσεγγίσουμε με διαφορετικούς τρόπους, είτε προδρομικά $x_i + \Delta x$, είτε οπισθοδρομικά $x_i - \Delta x$,είτε κεντρικά



Σχήμα 2.6 Προσέγγιση πρώτης παραγώγου

Για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor [18]. Εστω μια συνάρτηση φ(x), το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης γύρω από σημείο x_i γράφεται ως

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$+ \cdots \ldots . . + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.2)$$

Αντικαθιστώντας το x με x_{i+1} ή με x_{i-1} στην παραπάνω έκφραση, δημιουργούμε εκφράσεις για τις τιμές του φ στο σημείο i, χρησιμοποιώντας τιμές γύρω από αυτή.

Συγκεκριμένα για x_{i+1}:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.3)$$

Και για x_{i-1}:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.4)$$

Χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα x_{i+1} και x_{i-1}:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i$$
$$- \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O\left(\frac{\partial^n}{\partial x^2}\right) (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να προσεγγίσουμε τις παραγώγους πρώτης τάξης

- Προδρομικά (FDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}$ (2.6)
- Οπισθοδρομικά (BDS) : $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_\iota - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ (2.7)
- Κεντρικά (CDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ (2.8)

[19]

Οι όροι που αφαιρεθήκαν από τις παραπάνω σχέσεις ονομάζονται όροι περικοπής, αυτοί οι όροι μετράνε τις ακρίβεια της προσέγγισης και καθορίζουν τον ρυθμό με τον οποίο τα σφάλματα μειώνονται καθώς η απόσταση μεταξύ των πλεγματικών σημείων μικραίνει. Αυτοί οι όροι υπολογίζονται από την σχέση

$$e_r = (\Delta)^m a_{m+1} + (\Delta)^{m+1} a_{m+2} + \cdots..(\Delta)^n a_{n+1} (2.9)$$

Όπου Δx είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων και α οι μεγαλύτερες παράγωγοι πολλαπλασιασμένες με κάποιες σταθερές. [20]

Ενας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της παραγώγου είναι η πολύ προσαρμογή. Με αυτή την μέθοδο η συνάρτηση που θέλουμε να παραγωγίσουμε προσαρμόζεται με μια καμπύλη παρεμβολής και παραγωγίζουμε τα αποτελέσματα στην νέα καμπύλη. Μερικά γνωστά παραδείγματα είναι η προσέγγιση με τμηματικές συναρτήσεις, 2 πολύ γνωστές προσεγγίσεις αυτής της μορφής είναι η FDS και η BDS ανάλογα με το αν το δεύτερο σημείο δεξιά ή αριστερά του πρώτου. Προσαρμόζοντας μια παραβολή στα σημεία x_{i-1} , x_iκαι x_{i+1} υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο με παρεμβολή βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}(\Delta x_i)^2 - \phi_{i-1}(\Delta x_{i+1})^2 + \phi_i[(\Delta x_{i+1})^2 - (\Delta x_i)^2]}{\Delta x_{i+1}\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \quad (2.10)$$

Όπου $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ και για ομοιόμορφη κατανομή πλεγματικών σημείων αυτή μειώνεται στην προσέγγιση CDS .

Η δεύτερη παράγωγος εμφανίζεται σε όρους διάδοσης. Για να γίνει εκτίμηση της δεύτερης παραγώγου μπορούμε να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο 2 φορές. Γεωμετρικά η δεύτερη παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη που αναπαριστά την πρώτη παράγωγο. Για προσέγγιση BDS της παραγώγου στα σημεία x_{i+1} και x_i

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2(x_i - x_{i-1})} \quad (2.11)$$

Αντίστοιχα για την CDS προσέγγιση η οποία απαιτεί την πρώτη παράγωγο στα σημεία x_{i-1} και x_i, είναι καλύτερα να τα προσεγγίσουμε την μισή απόσταση:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1/2} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1/2} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (2.13)$$

Χρησιμοποιώντας τις 2 παραπάνω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1/2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1/2}}{1/2(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (2.14)$$

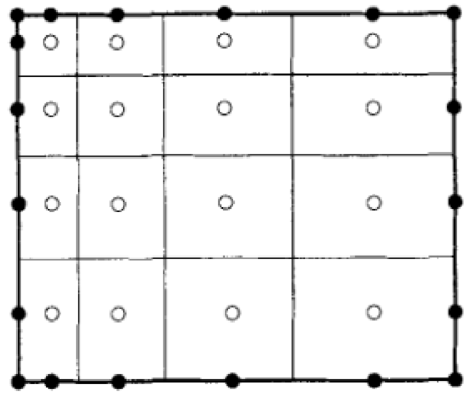
για ισαπέχουσες αποστάσεις μεταξύ πλεγματικών σημείων

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (2.15)$$

Τέλος σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ρευστών σε εξισώσεις διαφορών. [21]

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ

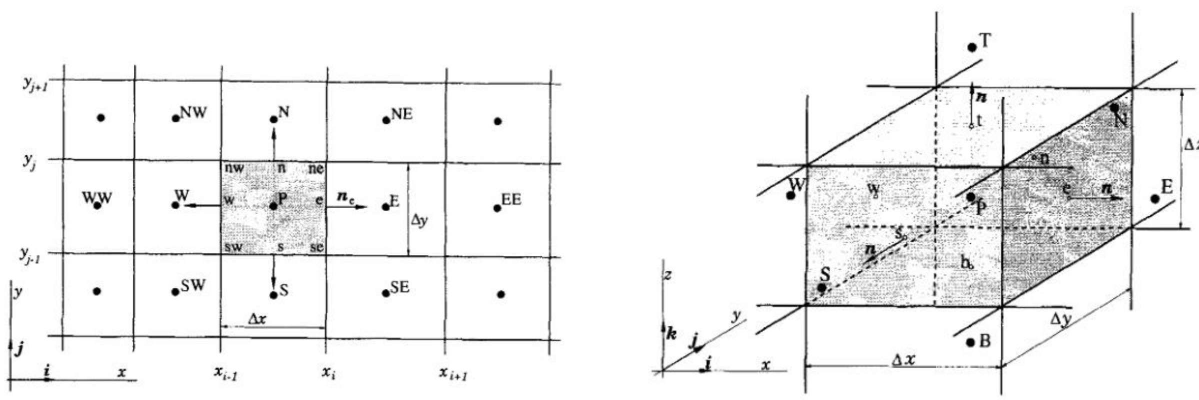
Στην μέθοδο πεπερασμένων όγκων ο χώρος λύσης χωρίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό όγκων ελέγχου από ένα πλέγμα στην πιο απλή περίπτωση η διακριτοποίηση γίνεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες αν και θα μπορούσε να γίνει σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Ο όγκος ελέγχου καθορίζεται από ένα πλέγμα και το υπολογιστικό σημείο βρίσκεται το κέντρου του όγκου ή σε οποιοδήποτε άλλο σημείο μέσα σε αυτόν.[22]



Σχήμα 2.7 Ογκος ελέγχου

Προσέγγιση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων:

Η επιφάνεια του όγκου ελέγχου έχει 4 πλευρές για δισδιάστατα προβλήματα και 6 πλευρές για τρισδιάστατα, η οποία θα συμβολίζονται με (E,W,N,S,T,B) ανάλογα με την θέση τους ως προς το υπολογιστικό σημείο.



Σχήμα 2.8 Επιφάνειες Ελέγχου

Η συνολική ροή μέσα από τον όγκο ελέγχου δίνεται από το άθροισμα στις 4 ή 6 πλευρές αντίστοιχα

$$\int_S f\,dS = \sum_k \int_{S_k} f\,dS \quad (2.16)$$

Εστω μια πλευρά ελέγχου e, ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος απαιτεί γνώση από όλο τον όγκο ελέγχου, όμως η μόνη γνωστή τιμή αφορά το σημείο υπολογισμού. Υπάρχουν 2 επίπεδα προσέγγισης :

1. Το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως προς μεταβλητές τιμές σε περισσότερα από ένα σημεία στο «κύτταρο».
2. Οι τιμές του κυττάρου προσεγγίζονται ως προς το υπολογιστικό σημείο.

Ο πιο απλός τρόπος προσέγγισης είναι η μέση τιμή πάνω σε όλη την επιφάνεια:

$$F_e = \int_{Se} f\,dS = \overline{f_e} S_e \approx f_e S_e \quad (2.17)$$

[23]

Ένας άλλος κανόνας προσέγγισης είναι ο κανόνας του τραπεζοειδούς όπου:

$$F_e = \int_{S_e} f\,dS \approx \frac{S_e}{2}(f_{ne} + f_{se})(2.18)$$

[24]

Για μεγαλύτερες προσεγγίσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Simpson

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{6}(f_{ne} + 4f_e + f_{se})(2.19)$$

[25]

Εδώ οι τιμές του ολοκληρώματος προσεγγίζονται από το κέντρο e και από 2 πλευρές ne και se

Προσέγγιση Χωρικών Ολοκληρωμάτων:

Η πιο απλή προσέγγιση είναι ο κανόνας της μέσης τιμής, όπου το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από το γινόμενο της μέσης τιμής της συνάρτησης

$$\int_{\Omega} e \, d\Omega = \bar{q}\Delta\Omega (2.20)$$

Όπου $\bar{q}$ η τιμή της συνάρτησης στο κέντρο του όγκου ελέγχου. Μια προσέγγισης μεγαλύτερης τάξης μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση της μορφής.

$$q(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 x y^2 + a_8 x^2 y^2 (2.21)$$

Όπου οι 9 συντελεστές υπολογίζονται προσαρμόζοντας την καμπύλη τις περιοχές (NW, W, SW, N, P, S, NE, E, SE)

$$\int_{\Omega} q \, d\Omega \approx \Delta x \Delta y \left[a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta \mathrm{x})^2 (\Delta \mathrm{y})^2 \right] (2.22)$$

[26],[27],[28]

3.0 ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΙΞΩΔΕΣ ΡΟΗ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

Για αστρόβιλη ροή

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = 0 \quad (3.1)$$

Και για ασυμπίεστο ρευστό, δηλαδή ρευστό με σταθερή πυκνότητα

$$\rho(x, y, z, t) = \rho \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση συνέχειας βλέπουμε ότι:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3.3)$$

Από την ανάλυση Helmholtz μπορούμε να γράψουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων αναλύεται σε ένα άθροισμα κλίσης βαθμωτού δυναμικού και στροβιλισμού ενός διανυσματικού δυναμικού

$$V = -\nabla\phi + \nabla \times A \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.1)

$$\nabla \times V = 0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = 0 \quad (3.6)$$

Αρα

$$V = -\nabla\phi (3.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση συνέχειας καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\nabla^2 \phi = 0 (3.8)$$

[29],[30]

Η οποία ονομάζεται εξίσωση Laplace ή εξίσωση Poisson απουσία πηγής, που περιγράφει αστρόβιλη, ασυμπίεστη και χωρίς ιξώδες ροή. Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μερική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και αρχικές συνθήκες, μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως την κίνηση αστρόβιλων και ασυμπίεστων ρευστών. Η λύση της Laplace για συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες είναι μοναδική:

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 διαφορετικές λύσεις των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών

$\boldsymbol{V_1} = \nabla\phi_1, \boldsymbol{V_2} = \nabla\phi_2$

Έστω $f = \phi_1 - \phi_2 \Rightarrow \nabla^2 f = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0$, πολλαπλασιάζοντας με το κάθετο ως προς την επιφάνεια S, που κλείνει τον όγκο V, μοναδιαίο διάνυσμα **n**

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \nabla\phi_1 \cdot \boldsymbol{n} - \nabla\phi_2 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad (3.9)$$

Αρα

$$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{V_2} \qquad (3.10)$$

Και η λύση είναι μοναδική. [31]

3.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ LAPLACE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΧΩΡΟ

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση Laplace στις 2 διαστάσεις:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 (3.11)$$

$$\phi(x,0) = f_1(x), \qquad \phi(x,L) = f_2(x), \qquad 0 \leq x \leq K$$

$$\phi(0,y) = g_1(y), \qquad \phi(K,y) = g_2(y), \qquad 0 \leq y \leq L$$

Το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών μπορείς να διαχωριστεί σε 2 διαφορετικά προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = 0, \qquad \phi(x,L) = 0, \qquad 0 \leq x \leq K$$

$$\phi(0,y) = g_1(y), \qquad \phi(K,y) = g_2(y), \qquad 0 \leq y \leq L$$

Πρόβλημα 2:

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = f_1(x), \phi(x,L) = f_2(x), 0 \leq x \leq K$$

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(K,y) = 0, \qquad 0 \leq y \leq L$$

Όπου ο συνδυασμός των λύσεων των 2 παραπάνω προβλημάτων θα δώσει την λύση στο αρχικό πρόβλημα :

Επίλυση προβλήματος 1:

Ο πιο συνήθης τρόπος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών. Με αυτή την μέθοδο θεωρούμε την συνάρτηση n μεταβλητών, που θέλουμε να βρούμε, σε γινόμενο n συναρτήσεων μιας μεταβλητής:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)(3.12)$$

Και έτσι η επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης μετασχηματίζεται σε επίλυση n συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(x)}\frac{\partial^2 Y(x)}{\partial y^2} = 0$$

Πλέον οι μερικές παράγωγοι μετασχηματίζονται σε συνήθεις

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(x)}\frac{d^2 Y(x)}{dy^2} = 0$$

Για να είναι ισχύει αυτή η εξίσωση θα πρέπει:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda \Rightarrow X''(x) = \lambda X(x)$$

$$\frac{1}{Y(x)}\frac{d^2 Y(x)}{dy^2} = -\lambda \Rightarrow Y''(y) = -\lambda Y(y)$$

Τις 2 διαφορικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

Επίλυση της 2ης ΣΔΕ:

Θεωρούμε την χαρακτηριστική λύση:

$$Y(y) = e^{my}$$

Αρα

$$Y'(y) = me^{my}, Y'(y) = m^2 e^{my}$$

Και αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση

$$m^2 e^{my} + \lambda e^{my} = 0 \Rightarrow e^{my}(m^2 + \lambda) = 0 \Rightarrow m = \pm i\lambda$$

Άρα η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων

$$Y(y) = Ae^{i\lambda y} + Be^{-i\lambda y}$$

Αντικαθιστούμε τον τύπο του Euler:

$$e^{i\lambda y} = \cos(\lambda y) + isin(\lambda y)$$

Και η λύση μετασχηματίζεται σε

$$Y(y) = Acos(\lambda y) + B\sin(\lambda y)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = 0\,, y(L) = 0$$

Μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών η λύση για την Y(y) είναι:

$$Y(y) = Asin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Επίλυση 1ης ΣΔΕ:

Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία και θεωρούμε χαρακτηριστική λύση:

$$X(x) = e^{mx}$$

Και την αντικαθιστούμε στην ΣΔΕ:

$$m^2e^{mx} - \lambda e^{mx} = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda$$

Άρα η λύση της είναι:

$$X(x) = Ae^{\lambda\chi} + Be^{-\lambda\chi}$$

Αντικαθιστώντας

$$sinhx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

Και

$$coshx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

Η λύση της X(x) γίνεται:

$$X(x) = Acosh\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + Bsinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Αφού οι τιμές της $x \in [0, K]$ μπορούμε να γράψουμε ως:

$$X(x) = A\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K - x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + B\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)}$$

Αφου έχουμε θεωρήσει ότι η λύση της Laplace είναι γινόμενο των X(x) και Y(y) και χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης η λύση του προβλήματος είναι

$$\phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K - x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} \quad (3.13)$$

Εφαρμόζουμε τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = g_1(y) (3.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = g_2(y)\ (3.14)$$

Και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουμε:

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy, n \in Z (3.15)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy\ , n \in Z\ (3.16)$$

Επίλυση προβλήματος 1:

Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία με τα παραπάνω η λύση του δεύτερου προβλήματος είναι

$$\phi_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{K}(L-y)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} (3.17)$$

Εφαρμόζουμε τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right) = f_1(x)\ (3.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f_2(x)\ \ (3.19)$$

Και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουμε:

$$c_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,,n \in Z \;(3.20)$$

$$d_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)dx\,,n \in Z \quad (3.21)$$

Έτσι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι το άθροισμα των επιμέρους λύσεων:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(K-x)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K}{L}\right)}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{K}(L-y)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{K}\right)} \;(3.22)$$

Με τους συντελεστές a_n, b_n, c_n, d_n να υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\,,n \in Z \;(3.23)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\,,n \in Z \;(3.24)$$

$$c_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,,n \in Z \;\;(3.25)$$

$$d_n = \frac{2}{K}\int_0^K f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{K}\right)dx\,,n \in Z \;(3.26)$$

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση Laplace μπορεί να λυθεί και σε άλλα συστήματα συντεταγμένων.

Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών:

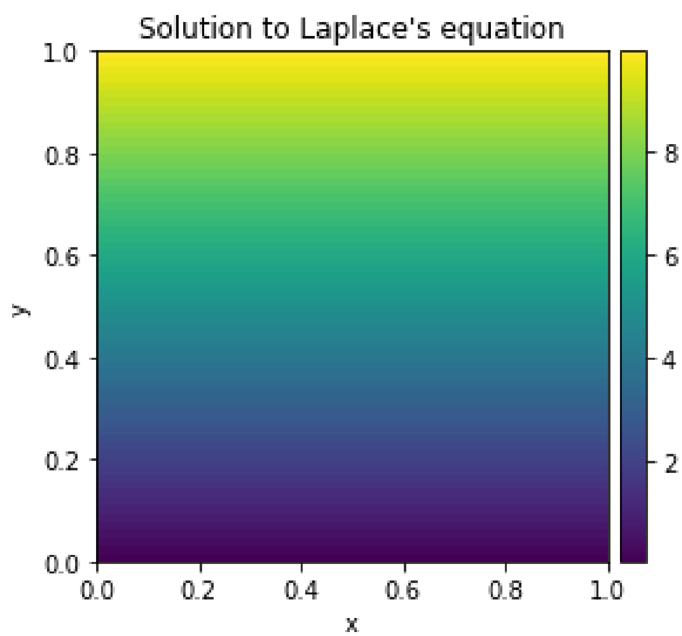
$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi(x,0) = 10, \qquad \phi(x,1) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$\phi(0,y) = y, \qquad \phi(1,y) = y, \qquad 0 \leq y \leq L$$

[32]

Η λύση της εξίσωση Laplace, χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη py-pde [33] είναι:



Σχήμα 3.1 Αναλυτική λύση της Laplace με την χρήση της βιβλιοθήκης py-pde

Με αντίστοιχο τρόπο η εξίσωση Laplace μπορεί να λυθεί σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

3.3 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΡΟΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί τους βασικούς νόμους της ρευστομηχανικής, δηλαδή την διατήρηση της μάζας και της ορμής υποθέτοντας ότι η ροή είναι ασυμπίεστη, χωρίς ιξώδες και αστρόβιλη. Για αστρόβιλη ροή

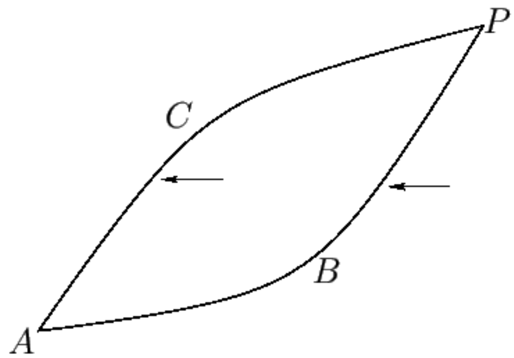
$$\vec{\nabla} \times V = \vec{0} \Rightarrow V = \vec{\nabla}\Phi (3.28)$$

Για δισδιάστατα πεδία οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων είναι:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} (3.29)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} (3.30)$$

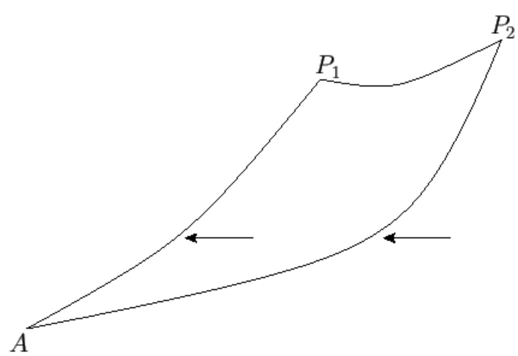
Εστω Α ένα σημείο στο επίπεδο x-y, και ABP και ACP 2 καμπύλες που ενώνονται με το Α σε και με σημείο P.



Σχήμα 3.2 Κλειστή επιφάνεια ACPB

Έστω ότι ρευστό δημιουργείται ή καταστρέφεται μέσα σε αυτή την κλειστή καμπύλη. Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, έχει ομοιόμορφη πυκνότητα. Η εξίσωση της συνέχειας μας λέει ότι όσο ρευστό περνάει μέσα από την δεξιά πλευρά της καμπύλης τόσο ρευστό βγαίνει και από την αριστερή πλευρά. Ο ρυθμός ροής μέσα από την επιφάνεια ονομάζεται ροή. Η ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά από την καμπύλη ABP, είναι ίση με την ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά της καμπύλης ACP. Επειδή η καμπύλη επιλέχθηκε με αυθαίρετο τρόπο, η ροή από τα δεξιά προς τα αριστερά μέσα από κάθε καμπύλη που ενώνει τα A και P είναι ίση με την ροή μέσα από το ABP. Στην πραγματικότητα αφού το σημείο βάσης A έχει επιλεχθεί, η παροχή εξαρτάται μόνο από την θέση του σημείου P, και από τον χρόνο t. Με άλλα λόγια αν ορίσουμε την ροή με Ψ και αυτή εξαρτάται από την θέση του P και από τον χρόνο. Η συνάρτηση Ψ ονομάζεται ροϊκή συνάρτηση. Η ύπαρξη της ροϊκής συνάρτησης είναι άμεση συνέπεια της υπόθεσης ασυμπίεστης ροής.

Θεωρούμε 2 σημεία P_1 και P_2 μαζί με το σημείο A. Εστω Ψ_1 και Ψ_2 οι ροϊκές συναρτήσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος των καμπύλων AP_1 και AP_2. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με τα παραπάνω, η παροχή κατά μήκος του AP_2 είναι ίση με την κατά μήκος του AP_1 και του P_1 P_2.. Η παροχή στο P_1 P_2 από τα δεξιά προς τα αριστερά είναι Ψ_1 -Ψ_2. Αν τα P_1 και P_2 βρίσκονται στην ίδια ροϊκή γραμμή η ροή μεταξύ τους είναι μηδέν, γιατί η τοπική ταχύτητα είναι παράλληλη με το P_1 P_2 . Συμπεραίνουμε ότι Ψ_1=Ψ_2, δηλαδή η ροϊκή συνάρτηση είναι παντού σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Η εξίσωση των ροϊκών γραμμών είναι Ψ=c, όπου c μια σταθερά.



Σχήμα 3.3 Κλειστή καμπύλη APA

Εστω P_1 P_2 = δS ένα απειροστό τόξο της καμπύλης αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως ευθεία. Η ταχύτητα του ρευστού σε αυτό το τόξο μπορεί να αναλυθεί σε μια παράλληλη και μια κάθετη συνιστώσα. Η παράλληλη συνιστώσα δεν προσφέρει τίποτα στην παροχή κατά μήκος του τόξου από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η κάθετη συνιστώσα συνεισφέρει $V \perp \delta S$ στην παροχή. Όμως η παροχή είναι ίση με Ψ_2 -Ψ_1, άρα

$$V \perp = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\delta S} \qquad (3.31)$$

Στο όριο $\delta S \rightarrow 0$, η κάθετη ταχύτητα από τα δεξιά προς τα αριστερά κατά μήκος του dS γίνεται

$$V \perp = \frac{d\Psi}{dS} \qquad (3.32)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θεωρώντας απειροστά τόξα παράλληλα στους άξονες x και y, καταλαβαίνουμε ότι

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad (3.33)$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (3.34)$$

Οι 2 παραπάνω εκφράσεις δίνουν

$$V = \hat{z} \times \vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}z \times \vec{\nabla}\Psi \qquad (3.35)$$

Ο παραπάνω τρόπος γραφής της ταχύτητας δείχνει κατευθείαν ότι ο περιορισμός του ασυμπίεστους ρευστού ικανοποιείται άμεσα, λόγω της ταυτότητας

$$\nabla \cdot (\nabla A \times \nabla B) = 0 \qquad (3.36)$$

Η στροβιλότητα στη δισδιάστατη ροή γράφεται ως

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{z} \qquad (3.37)$$

Όπου

$$\omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \, (3.38)$$

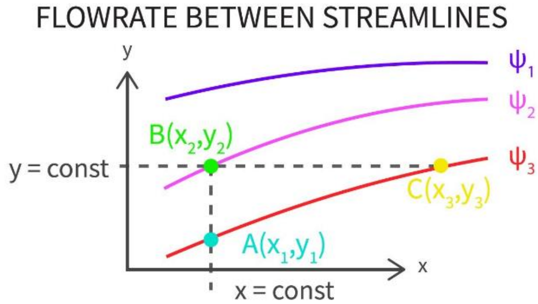
Αρα

$$\omega_z = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi \qquad (3.39)$$

Έτσι η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace [34],[35]

Μια ροϊκή γραμμή έχει την ιδιότητα να αντιστοιχεί σε γραμμές σταθερών τιμών της ροϊκής συνάρτησης Ψ=σταθερό. Με τον ορισμό των ροϊκών γραμμών δίνεται στη ροϊκή συνάρτηση φυσική σημασία επειδή αποτελεί ένα μέτρο για την παροχή του όγκου ροής. Από τον ορισμό της ταχύτητας, η οποία είναι εφαπτόμενη των ροϊκών γραμμών Ψ και η ροή περιορίζεται στο χώρο από Ψ_1 μέχρι Ψ_2, η παροχή ορίζεται ως:

$$\Pi_{12} = \int V\,dS = \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \Psi_2 - \Psi_1 (3.40)$$



Σχήμα 3.4 Παροχή

3.4 ΡΟΙΚΕΣ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Οι σχέσεις που συνδέουν την ροϊκή συνάρτηση Ψ με το δυναμικό ταχύτητας Φ είναι οι διαφορικές εξισώσεις Cauchy Riemann

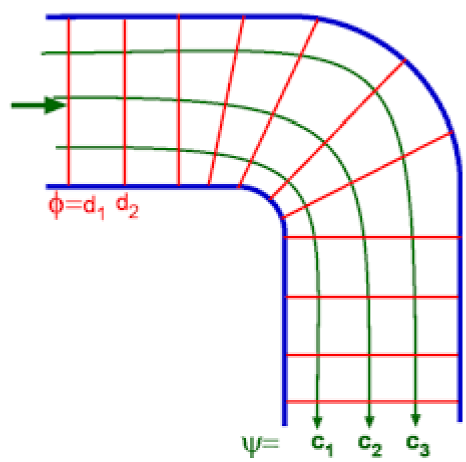
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} (3.41)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} (3.42)$$

οι οποίες πληρούν την συνθήκη ορθογωνίοτητας

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 (3.43)$$

η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει την ορθογωνιότητα μεταξύ ροϊκών (Ψ=σταθερό) και ισοδυναμικών (Φ=σταθερό) γραμμών.



Σχήμα 3.5 Σχέση μεταξύ Ψ και Φ

Η ροϊκή γραμμή είναι μια υποθετική γραμμή στο ρευστό, στην οποία το διάνυσμα της ταχύτητας **V** σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι κάθετο σε αυτή. [36]

4.0 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να αναφέρουμε ότι στην παρούσα σπουδαστική εργασία έγινε παρουσίαση στοιχείων θεωρίας της Ρευστομηχανικής. Εγινε αναλυτική παρουσίαση και εξήγηση των βασικών εξισώσεων που περιγράφουν την ροή ρευστών, δηλαδή των εξισώσεων ορμής, ενέργειας και συνέχειας. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον διαχωρισμό των εξισώσεων σε διατηρητική και μη διατηρητική μορφή, κάτι το οποίο δεν έχει νόημα για θεωρητική μελέτη αλλά είναι ιδιαίτερα βοηθητικό σε υπολογιστικές εφαρμογές. Δόθηκε πλήρης εξήγηση αριθμητικών μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε υπολογιστικές εφαρμογές και στο τέλος έγινε επεξήγηση της εξίσωσης Laplace η οποία περιγράφει αστρόβιλη, ασυμπίεστη και χωρίς ιξώδες ροή.

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις που περιγράφουν την ρευστομηχανική είναι οι:

- **Διατηρητική Μορφή** :

  1. Εξίσωση Συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (4.1)$$

  2. Εξισώσεις ορμής:

$$\boxed{\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho f_{\chi}} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] + \rho f_y} (4.3)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w V) = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f_z} (4.5)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας:

$$\frac{\partial}{\partial}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)V\right] =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (4.6)$$

- **Μη διατηρητική μορφή:**

1. Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot v = 0 (4.8)$$

2. Εξισώσεις ορμής

$$\boxed{\rho\frac{\partial Du}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho f_\chi} (4.9)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dv}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] + \rho f_y} (4.10)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial Dw}{\partial t} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f_z} (4.11)$$

3. Εξίσωση Ενέργειας

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) =$$

$$= \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{u\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zx}}{\partial z} + \frac{v\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{v\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{u\tau_{zy}}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{w\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{w\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{w\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho f \cdot V (4.12)$$

όπου σε υπολογιστικές εφαρμογές οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, όπου οι παράγωγοι αντικαθίστανται με εξισώσεις διαφορών

- Προδρομικά (FDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{x_{i+1}-x_i}$ (4.13)
- Οπισθοδρομικά (BDS) : $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_\iota-\phi_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$ (4.14)
- Κεντρικά (CDS): $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}$ (4.15)
- $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}-2\phi_i}{(\Delta x)^2}$ (4.16)

είτε με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων όπου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά.

Τέλος αυτή η εργασία εστιάζει στην ανάπτυξη μεθόδων για υπολογιστικές εφαρμογές και ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην έννοια της παροχή και στον τρόπο υπολογισμού της. Για ασυμπίεστα, αστρόβιλα και χωρίς ιξώδες ρευστά οι εξισώσεις Navier-Stokes μετασχηματίζονται στην εξίσωση Laplace

$$\nabla^2\phi = 0 (4.17)$$

και το πεδίο ταχυτήτων Φ συνδέεται με την ροϊκή συνάρτηση μέσω των εξισώσεων Riemann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} (4.18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} (4.19)$$

Τέλος, η παροχή δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής όγκου, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ροϊκή συνάρτηση, ως:

$$\Pi_{12} = \int V\, d\boldsymbol{S} = \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \Psi_2 - \Psi_1 (4.20)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bhutta, Muhammad Mahmood Aslam, et al. "CFD applications in various heat exchangers design: A review." *Applied Thermal Engineering* 32 (2012): 1-12.

[2] vanRossum, Guido. "Python reference manual." *Department of Computer Science [CS]* R 9525 (1995).

[3] Hunter, John D. "Matplotlib: A 2D graphics environment." *Computing in science & engineering* 9.03 (2007): 90-95.

[4] Kloss, Christoph, et al. "Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD–DEM." *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal* 12.2-3 (2012): 140-152.

[5] Zawawi, Mohd Hafiz, et al. "A review: Fundamentals of computational fluid dynamics (CFD)." *AIP conference proceedings*. Vol. 2030. No. 1. AIP Publishing LLC, 2018.

[6] Bhaskaran, Rajesh, and Lance Collins. "Introduction to CFD basics." *Cornell University-Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering* (2002): 1-21.

[7] Zawawi, Mohd Hafiz, et al. "A review: Fundamentals of computational fluid dynamics (CFD)." *AIP conference proceedings*. Vol. 2030. No. 1. AIP Publishing LLC, 2018.

[8] Ochoa-Tapia, J. Alberto, and Stephen Whitaker. "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38.14 (1995): 2635-2646.

[9] Massey, Bernard S., and John Ward-Smith. *Mechanics of fluids*. Crc Press, 2018.

[10] Anderson, John David, and J. Wendt. *Computational fluid dynamics*. Vol. 206. New York: McGraw-Hill, 1995.

[11] Busse, Christian, Andrew P. Kach, and Stephan M. Wagner. "Boundary conditions: What they are, how to explore them, why we need them, and when to consider them." *Organizational Research Methods* 20.4 (2017): 574-609.
[12] Engquist, Björn, and Andrew Majda. "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 74.5 (1977): 1765-1766.

[13] Renardy, Michael, and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*. Vol. 13. Springer Science & Business Media, 2006.

[14] Naz, Rahila, Fazal Mahmood Mahomed, and David P. Mason. "Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics." *Applied Mathematics and Computation* 205.1 (2008): 212-230.

[15] Hess, John L. "Panel methods in computational fluid dynamics." *Annual Review of Fluid Mechanics* 22 (1990): 255-274.

[16] Loehner, Rainald. "Finite element methods in CFD: Grid generation, adaptivity, and parallelization." *In AGARD* (1992).

[17] Corrigan, Andrew, et al. "Running unstructured grid-based CFD solvers on modern graphics hardware." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 66.2 (2011): 221-229.

[18] Corliss, George, and Y. F. Chang. "Solving ordinary differential equations using Taylor series." *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 8.2 (1982): 114-144.

[19] Thomée, Vidar. "High order local approximations to derivatives in the finite element method." *Mathematics of Computation* 31.139 (1977): 652-660.

[20] Grätsch, Thomas, and Klaus-Jürgen Bathe. "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis." *Computers & structures* 83.4-5 (2005): 235-265.

[21] Szabó, Barna, and Ivo Babuška. "Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation." (2021).

[22] Eymard, Robert, Thierry Gallouët, and Raphaèle Herbin. "Finite volume methods." *Handbook of numerical analysis* 7 (2000): 713-1018.

[23] Vahtras, O., J. Almlöf, and M. W. Feyereisen. "Integral approximations for LCAO-SCF calculations." *Chemical Physics Letters* 213.5-6 (1993): 514-518.

[24] Dragomir, Sever S., et al. "A generalisation of the trapezoidal rule for the Riemann-Stieltjes integral and applications." *RGMIA research report collection* 3.4 (2000).

[25] Kuncir, Guy F. "Algorithm 103: Simpson's rule integrator." *Communications of the ACM* 5.6 (1962): 347.

[26] Sadowsky, Michael. "A formula for approximate computation of a triple integral." *The American Mathematical Monthly* 47.8 (1940): 539-543.

[27] Moukalled, Fadl, Luca Mangani, and Marwan Darwish. "The finite volume method." *The finite volume method in computational fluid dynamics*. Springer, Cham, 2016. 103-135.

[28] Ferziger, Joel H., Milovan Perić, and Robert L. Street. *Computational methods for fluid dynamics*. Vol. 3. Berlin: springer, 2002.

[29] Strauss, Walter A. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.

[30] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.

[31] DiPerna, Ronald J. "Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws." *Indiana University Mathematics Journal* 28.1 (1979): 137-188.

[32] Li, Peter. "Uniqueness of $ L^ 1$ solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds." *Journal of differential geometry* 20.2 (1984): 447-457.

[33] Zwicker, David. "py-pde: A python package for solving partial differential equations." *Journal of Open Source Software* 5.48 (2020): 2158.

[34] Mitra, Ambar K. "Finite difference method for the solution of Laplace equation." *Department of aerospace engineering Iowa state University* (2010).

[35] Smith, Gordon D., Gordon D. Smith, and Gordon Dennis Smith Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.

[36] Παπανίκας, Δημήτρης Γ. "Εφαρμοσμένη ρευστομηχανική." *Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα* (2010).