

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΕΩΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΜΗΧΑΝΩΝ



Σπουδαστική Εργασία

Επίλυση Γραμμικού Ισοθερμικού Προβλήματος Ελστοϋδροδυναμικής Λίπανσης με την Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών

Θεοδωρόπουλος Λεωνίδας

1059754

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολακόπουλος Παντελής

Σπουδαστική εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών του
Πανεπιστημίου Πατρών

Πανεπιστήμιο Πατρών, [Τμήμα Μηχανολόγων και
Αεροναυπηγών]

[Θεοδωρόπουλος Λεωνίδας]

© [2023] – Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Επίλυση Γραμμικού Ισοθερμικού Προβλήματος Ελστουδροδυναμικής Λίπανσης με την Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών

Περίληψη

Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με το φαινόμενο της Ελστουδροδυναμικής λίπανσης τα χαρακτηριστικά της αλλά και τις παραμέτρους που την επηρεάζουν και προσπαθεί με υπολογιστικές μεθόδους να λύσει το απλό μονοδιάστατο ισοθερμικό πρόβλημα της ελστουδροδυναμικής λίπανσης.

Αρχικά η εργασία εισάγει τον αναγνώστη στην βασική θεωρία λίπανσης και στις διαφορετικές φάσεις της, από την οριακή μέχρι και την υδροδυναμική λίπανση εξηγώντας τις διαφορές τους. Στην συνέχεια αναλύεται η φάση της ελστουδροδυναμικής λίπανσης παραθέτοντας της βασικές παραμέτρους που την επηρεάζουν και τα χαρακτηριστικά της. Βασικά σημεία είναι η ανάλυση της επίδρασης του ιξώδους του λιπαντικού και της πυκνότητας του αλλά και η βιβλιογραφική επισκόπηση της επιρροής των βασικών αδιάστατων παραμέτρων της ταχύτητας του φορτίου και της ελλειπτικότητας αναδεικνύοντας την σημασία τους.

Στην συνέχεια η εργασία παρουσιάζει ένα λεπτομερές μοντέλο ικανό να προσεγγίσει το φαινόμενο της γραμμικής ΕΥΔ λίπανσης. Για το υδροδυναμικό πρόβλημα της λίπανσης παρουσιάζεται και επεξηγείται η εξίσωση Reynolds ως η βασική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών και εξηγείτε πως θα επιλυθεί η εξίσωση Reynolds. Με τα προηγούμενα εργαλεία η εργασία παρουσιάζει ένα υπολογιστικό μοντέλο με το οποίο επιλύεται το πρόβλημα της ΕΥΔ λίπανσης εισάγοντας της παραμέτρους. Τα αποτελέσματα του κώδικα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα επιλύσεων άλλων εργασιών που χρησιμοποιούν διαφορετική μέθοδο επίλυσης. Από τα αποτελέσματα- διαγράμματα της πίεσης και του προφίλ του λιπαντικού εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά της ΕΥΔ λίπανσης ενώ η μέθοδος επίλυσης και το πρόγραμμα με το οποίο επιλύθηκε το απλό πρόβλημα της γραμμικής ισοθερμικής ΕΥΔ λίπανσης αποτελεί την βάση και αφετηρία για περεταίρω εμβάθυνση στο αντικείμενο.

Λέξεις Κλειδιά:

[Θεωρία Λίπανσης, Ελαστουδροδυναμική λίπανση, Μέθοδος πεπερασμένων Διαφορών (FDM), Ρευστοδυναμική, Υπολογιστικές Μέθοδοι]

Solution of Linear Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication Problem using the Finite Difference Method.

Abstract

This thesis embarks on a comprehensive exploration of Elastohydrodynamic Lubrication (EHL) in line contacts and ends by solving a simple isothermal EHL line problem with the finite difference method.

It begins by introducing fundamental lubrication regimes and gives an overview of the basics of lubrication theory, providing a foundational understanding of the transition from boundary to hydrodynamic lubrication. The core of the study focuses on EHL, elucidating its parameters and characteristics. Key aspects include an in-depth analysis of lubricant viscosity and density and gives bibliographic insight on the influence of speed, load and ellipticity shedding light on their roles in EHL performance.

The thesis advances by presenting a detailed modeling approach for EHL in line contacts. It introduces the Finite Difference Method (FDM) in conjunction with the Reynolds equation, which is thoroughly explained. By using these tools, the thesis implements computational and numerical methods to develop a computational code that accurately calculates pressure distribution and film thickness. This numerical model serves as a powerful tool for investigating EHL behavior. The culmination of the research lies in the presentation of results, offering valuable insights into pressure distribution, film thickness, and the overall performance of EHL in line contacts. The results of the program are being compared to already existing solutions of bibliography and these findings hold significant insight on how the EHL lubrication works. Also, the computational program that solves the simple 1-dimensional isothermal EHL problem is a good starting point and foundation for further study of the phenomenon.

Key Words:

[Lubrication Theory, Elastohydrodynamic Lubrication, Finite Difference Method(FDM), Fluid Dynamics, Computational Methods]

Περιεχόμενα

1.	Λίπανση και λιπαντικά.....	1
1.1	Εισαγωγική αναφορά-λίπανση στα στοιχεία μηχανών	1
1.2	Είδη Λιπαντικών.....	3
1.2.1	Υγρά λιπαντικά	3
1.2.2	Γράσα - υβριδική λίπανση.....	5
1.2.3	Στερεά Λιπαντικά.....	5
1.2.4	Αέρια Λιπαντικά	6
1.3	Μηχανισμοί λίπανσης.....	6
2.	Μηχανισμοί Υγρής Λίπανσης.....	7
2.1	Οριακή λίπανση.....	8
2.2	Μεικτή Λίπανση	9
2.3	Ελστοϋδροδυναμική λίπανση.....	10
2.4	Υδροδυναμική λίπανση	11
3.	Χαρακτηριστικά και Παράμετροι του Φαινομένου της ΕΥΔ λίπανσης....	12
3.1	Κατανομή πίεσης στην ΕΥΔ.....	13
3.2	Λιπαντικό Φιλμ στην ΕΥΔ	14
3.3	Υπολογισμός πάχους ΕΥΔ λίπανσης	16
3.4	Επίδραση των Αδιάστατων Παραμέτρων στην Κατανομή Πίεσης και στο Προφίλ του ΕΥΔ Φιλμ.....	17
3.4.1	Επίδραση της παραμέτρου της ταχύτητας.....	17
3.4.2	Επίδραση της παραμέτρου του φορτίου.	19
3.4.3	Επίδραση της παραμέτρου της ελλειπτικότητας.	21
3.5	Ακριβέστερες σχέσεις για τον υπολογισμό του ΕΥΔ λιπαντικού φιλμ	22
3.5.1	Ισο-ιζώδες άκαμπτου σώματος.....	24
3.5.2	Πιεζο-ιζώδες άκαμπτου σώματος.....	24
3.5.3	Ισο-ιζώδες ελαστικού σώματος	24
3.5.4	Πιεζο-ιζώδες ελαστικού σώματος	25
3.6	Δυναμικό Ιξώδες.....	25
3.7	Πυκνότητα λιπαντικού	27
4.	Θεωρία Πεπερασμένων Διαφορών FDM – Μοντελοποίηση Λίπανσης σε μη Σύμμορφες Επαφές	27
4.1	Θεωρία Hertz και θεωρητική γραμμή επαφής	28

4.2	Δυναμικές εξισώσεις κίνησης των ρευστών	31
	Εξισώσεις Navier-Stokes	31
	Νόμος του Reynolds	33
4.3	Θεωρία Πεπερασμένων Διαφορών	39
	Σειρά Taylor και αριθμητική προσέγγιση παραγώγων	39
4.4	Επίλυση Reynolds με την Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών	41
4.5	Εξίσωση Ισορροπίας Δύναμης	42
5.	Επίλυση του Προβλήματος Γραμμικής Ισοθερμικής ΕΥΔ Λίπανσης.....	44
5.1	Βασικές Εξισώσεις	44
5.2	Αριθμητική μέθοδος υπολογισμού του προβλήματος σε προγραμματιστικό περιβάλλον	46
	5.2.1 Επαναληπτική Μέθοδος για την κατανομή πίεσης.	46
	5.2.2 Αριθμητική μέθοδος για την ισορροπία των δυνάμεων	46
	5.2.3 Δομή κώδικα.....	47
	Αρχικές Παράμετροι και Συνθήκες	51
6.	Αποτελέσματα και Συμπεράσματα	52
6.1	Αποτελέσματα	52
6.2	Συμπεράσματα.....	54

Πίνακας Εικόνων

Εικόνα 2-1: Καμπύλη Stribeck	7
Εικόνα 3-1: Χαρακτηριστικό Προφίλ και Κατανομή Πίεσης λιπαντικού στην ΕΥΔ λίπανση	13
Εικόνα 3-2: Ανάλυση Λιπαντικού Φιλμ ΕΥΔ λίπανσης.....	15
Εικόνα 3-3: Επίδραση της ταχύτητας στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.	19
Εικόνα 3-4: Επίδραση του φορτίου στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.	20
Εικόνα 3-5: Επίδραση της ελλειπτικότητας στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.	21
Εικόνα 3-6: Περιοχές μηχανισμών λίπανσης για παράμετρο ελλειπτικότητας $k=1$	23
Εικόνα 3-7: Ιδιότητες των μη Νευτωνικών ρευστών.....	26
Εικόνα 4-1: Θεωρητική γραμμή επαφής Hertz.....	29
Εικόνα 4-2: Παράδειγμα μη-σύμμορφης (αριστερά) και σύμμορφης (δεξιά) επαφής.....	30
Εικόνα 4-3: Στοιχειώδης όγκος ρευστού.	34
Εικόνα 4-4: Στοιχείο λιπαντικού φιλμ μεταξύ δυο επιφανειών. (α)xz (b)yz (c)xy	37
Εικόνα 5-1: Υποπρόγραμμα HREE	49
Εικόνα 5-2: Υποπρόγραμμα ITER.....	49
Εικόνα 5-3: Πρόγραμμα EHLLINE.....	50
Εικόνα 6-1: Κατανομή Πίεσης ΕΥΔ	52
Εικόνα 6-2: Προφίλ λιπαντικού φιλμ.....	52
Εικόνα 6-3: Σύγκριση κατανομής πίεσης	53
Εικόνα 6-4: Σύγκριση προφίλ λιπαντικού φιλμ	53

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια μελέτη των φαινομένων λίπανσης και κυρίως του φαινομένου της Ελστοϋδροδυναμικής λίπανσης. Η λίπανση μηχανών και μηχανισμών αποτελεί μεγάλο κομμάτι του σχεδιασμού τους. Από τα βαριά μηχανήματα που βρίσκονται στην βιομηχανία μέχρι και τα γρανάζια των ρολογιών χειρός όλα τα στοιχεία μηχανών που οι επιφάνειες τους συνεργάζονται και μεταδίδουν κίνηση χρειάζονται την λίπανση για την ομαλή λειτουργία τους. Κακώς λιπαινόμενες μηχανές σημαίνουν μεγάλες τριβές και απώλειες ενέργειας σε μορφή θερμότητας και πολλές φορές σημαντική φθορά των μηχανών με αποτέλεσμα την συχνή ανάγκη για αντικατάσταση Παγκοσμίως, το 20% της παραγωγής ενέργειας σπαταλάται λόγω τριβών και το 3% λόγω φθορών στα μηχανήματα. Η επιστήμη της τριβολογίας κομμάτι της οποίας είναι και η λίπανση έχει ως στόχο την βελτιστοποίηση των συνθηκών λειτουργίας των συνεργαζόμενων επιφανειών. Η ενδελεχής μελέτη των φαινομένων λίπανσης, μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα τα χαρακτηριστικά και τις παραμέτρους που τα επηρεάζουν και τελικά να βρίσκουμε λύσεις για την βελτιστοποίηση της λίπανσης η οποία σημαίνει ποιοτικότερη και πιο αξιόπιστη λειτουργία, οικονομικότερη και πιο φιλική προς το περιβάλλον επιλογή υλικών.

1. Λίπανση και λιπαντικά

1.1 Εισαγωγική αναφορά-λίπανση στα στοιχεία μηχανών

Για να επιτευχθεί η ομαλή κίνηση μεταξύ δυο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή και να αποφευχθούν τυχούσες φθορές, ρευστά υλικά ή ακόμα και σε μερικές περιπτώσεις στερεά με μικρή αντοχή διάτμησης εφαρμόζονται αναμεσά τους. Κύριος στόχος αυτών των υλικών είναι η διευκόλυνση της κίνησης μεταξύ των επιφανειών δηλαδή η μείωση του συντελεστή τριβής και κατά συνέπεια της δύναμης τριβής. Αυτός μηχανισμός ονομάζεται λίπανση και αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι κάθε μηχανολογικής κατασκευής ενώ η πολυπλοκότητα και πολυπαραγοντικότητα χρήζει εξειδικευμένης μελέτης.

Αν και φαινομενικά οι επιφάνειες ενός τριβοζεύγους μπορεί να είναι λείες σε μικροσκοπικό επίπεδο το ανάγλυφο τους παρουσιάζει εξάρσεις και βυθίσεις δηλαδή τραχύτητα. Τα λιπαντικά υλικά αφενός καλύπτουν αυτές της ανωμαλίες στην γεωμετρία της επιφάνειας και αφετέρου στην δημιουργούν ένα

λιπαντικό φιλμ, το πάχος του οποίου κυμαίνεται μεταξύ 1 και 100 μm , που διαχωρίζει τις επιφάνειες.

Το φαινόμενο της λίπανσης πέρα από τον κύριο στόχο του που είναι η διευκόλυνση της κίνησης έχει κατά περίπτωση και άλλες ευεργετικές ιδιότητες για το τριβοζεύγους:

- Μειώνει τη φθορά των επιφανειών αποφεύγοντας την άμεση επαφή μετάλλου με μέταλλο.
- Μειώνει τη διαστολή του μετάλλου λόγω της θερμότητας τριβής και την καταστροφή του υλικού.
- Απάγει θερμότητα από το σύστημα λειτουργώντας ως ψυκτικό υγρό
- Μειώνει τον θόρυβο
- Μειώνει το κόστος συντήρησης.
- Μειώνει επίσης την απώλεια ισχύος σε κινητήρες εσωτερικής καύσης.
- Η λιπαντική μεμβράνη λειτουργεί ως προστατευτικό και αποτρέπει την διείσδυση ξένων υλικών και εμποδίζοντας τη σκουριά και τη διάβρωση.

Όλα αυτά τα πλεονεκτήματα οφείλονται κυρίως στις ιδιότητες των λιπαντικών που χρησιμοποιούνται. Γενικά είναι αδύνατον να εκπληρωθούν όλοι οι παραπάνω στόχοι αφού οι συνθήκες λειτουργίας διαφέρουν από εφαρμογή σε εφαρμογή.

Η σωστή επιλογή του τύπου λιπαντικού βασίζεται σε ορισμένα κριτήρια όπως η θερμοκρασία και το περιβάλλον λειτουργίας, η δυνατότητα συντήρησης, οι μηχανικές και οι χημικές ιδιότητες και το συνολικό κόστος.

Η ποιότητα του λιπαντικού και εν συνεχεία η καταλληλότητα του κρίνεται με βασικά κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά που αφορούν στην (1):

- Πρόσφυση (adhesion) του λιπαντικού σε σχέση με τις επιφάνειες του τριβοζεύγους έτσι ώστε να δημιουργούνται συνθήκες μη ολίσθησης. των οριακών στρωμάτων του λιπαντικού που βρίσκονται σε επαφή με τις στερεές επιφάνειες.
- Συνοχή (cohesion) δομής σε όλο το πάχος του, ώστε κατά τη φόρτιση και τη σχετική κίνηση να μην αποσυντίθεται και να μην χάνει το λιπαντικό χαρακτήρα του κατά τη λειτουργία.
- Σταθερότητα δομής και ιδιοτήτων σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών. Που αναμένεται να αναπτυχθούν στις επιφάνειες επαφής ώστε να μην γίνεται ασταθής λειτουργία του λιπαντικού συστήματος.
- Χημική αδράνεια σε σχέση με το ηθικό των επιφανειών των συζύγων σωμάτων.

Αυτά τα ποιοτικά χαρακτηριστικά είναι οι φυσικές ιδιότητες, οι χημικές και αφορούν στην απόδοση του λιπαντικού. Κάποιες από αυτές τις ιδιότητες είναι :

- **Ιξώδες:** Καθορίζει την ικανότητά του να δημιουργήσει μια λιπαντική μεμβράνη και να διατηρήσει το διαχωρισμό μεταξύ κινούμενων επιφανειών.
- **Θερμική σταθερότητα:** αναφέρεται στην ικανότητα των λιπαντικών να αντέχουν στην αποσύνθεση σε υψηλές θερμοκρασίες. Η κακή θερμική σταθερότητα μπορεί να οδηγήσει σε ανομοιογενές λιπαντικό.
- **Η αντοχή ενός λιπαντικού στην οξείδωση και την αποσύνθεση λόγω της έκθεσης σε οξυγόνο και υψηλές θερμοκρασίες.**
- **Σημείο Ανάφλεξης:** Η χαμηλότερη θερμοκρασία στην οποία ένα λιπαντικό εκπέμπει αέρια σωματίδια με ικανά να αναφλεγούν. Υποδεικνύει τις πυρασφάλειας χαρακτηριστικά του λιπαντικού.
- **Πυκνότητα:** Αφορά στα ροή
- **Σημείο στάξης:** το θερμοκρασιακό σημείο εκείνο κατά το οποίο μια σταγόνα από το λιπαντικό ρέει από το υπόλοιπο
- **Θερμική Αγωγιμότητα:** Η ικανότητα του λιπαντικού να μεταφέρει θερμότητα.

Ουσιαστικά αυτά είναι τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά που κατηγοριοποιούν ένα ρευστό ως λιπαντικό και ανάλογα με αυτές τις ιδιότητες κρίνεται και αν είναι κατάλληλο για συγκεκριμένες χρήσεις.

Η σωστή επιλογή του τύπου Λιπαντικού βασίζεται σε ορισμένα κριτήρια, όπως η θερμοκρασία και το περιβάλλον λειτουργίας. Η δυνατότητα συντήρησης οι μηχανικές και χημικές ιδιότητες και το συνολικό κόστος. Τα λιπαντικά μπορούν να βρεθούν σε υγρή μορφή σε γράσα (υβριδική) και σε στερεή.

1.2 Είδη Λιπαντικών

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω τα λιπαντικά που χρησιμοποιούμε διαφέρουν από εφαρμογή σε εφαρμογή ανάλογα με τις συνθήκες στις οποίες θα κληθούν να λειτουργήσουν αλλά και με τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να έχουν στην απόδοσή τους. Μια γενική κατάταξη των λιπαντικών μέσων που χρησιμοποιούνται φαίνεται στο σχήμα.

1.2.1 Υγρά λιπαντικά

Τα υγρά λιπαντικά είναι κυρίως ορυκτέλαια και είναι υποπαράγοντα του πετρελαίου. Η μοριακή δομή τους έχει πολλαπλές ευεργετικές φυσικές και

χημικές ιδιότητες για τις λιπαινόμενες επιφάνειες. Η δυνατότητα τους να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κλειστό κύκλωμα λίπανσης με ελεγχόμενη τροφοδοσία από αγωγούς μπορούν να συμβάλλουν σημαντικά σε συστήματα που λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες και τα οποία χρειάζονται ικανοποιητική ψύξη απάγοντας θερμότητα από το λιπαινόμενο σύστημα. Μπορούν επίσης να εμπλουτιστούν με χημικές ουσίες ή σωματίδια για να βελτιώσουν την απόδοσή τους. Τέλος το κόστος τους δεν είναι υψηλό με βάση τα υπόλοιπα είδη λιπαντικών. Λόγω αυτών των ιδιοτήτων, τα υγρά λιπαντικά αποτελούν τον πιο συνήθη τρόπο λίπανσης. Προφανώς το περιβαλλοντικό κόστος που έχουν τα υγρά λιπαντικά αποτελεί το σημαντικότερο μειονέκτημα αυτής της κατηγορίας λίπανσης.

Τα ορυκτέλαια παράγονται από τη διύλιση του αργού πετρελαίου και το 95% των λιπαντικών που παράγονται αποτελείται κυρίως από ορυκτέλαια. Βασικά, τα έλαια αυτά αποτελούνται από υδρογονάνθρακες με μοριακό βάρος που κυμαίνεται από περίπου 250 για λιπαντικά χαμηλού ιξώδους έως 1000 για λιπαντικά υψηλού ιξώδους.

Τα ορυκτέλαια έχουν επιπλέον το μειονέκτημα ότι σε υψηλές θερμοκρασίες λεπταίνουν ενώ σε ψυχρές πήζουν, αλλάζει δηλαδή σημαντικά το ιξώδες τους με τις θερμοκρασιακές αλλαγές. Η Εταιρεία SAE έχει αναπτύξει ένα σύστημα ταξινόμησης ιξώδους για τα λιπαντικά κινητήρων με βάση τα χαρακτηριστικά ροής τους. Η ταξινόμηση βοηθά στον καθορισμό του βέλτιστου εύρους ιξώδους για μια δεδομένη θερμοκρασία λειτουργίας.

Οι βαθμίδες ιξώδους κατά SAE έχουν δύο αριθμούς, με το πρόθεμα «W» (χειμερινός βαθμός) ή χωρίς πρόθεμα (θερινός βαθμός). Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει το ιξώδες σε χαμηλές θερμοκρασίες, ενώ ο δεύτερος το ιξώδες σε υψηλές θερμοκρασίες. Τα πολύβαθμα λιπαντικά όπως 10W - 30 παρέχουν κατάλληλο ιξώδες τόσο το χειμώνα όσο και το καλοκαίρι. Η σωστή επιλογή βαθμίδας SAE εξασφαλίζει επαρκή λίπανση σε ακραίες θερμοκρασίες. Οι παραπάνω παράγοντες οδήγησαν στην ανάγκη παραγωγής λιπαντικών για εφαρμογές που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν από τα ορυκτέλαια. Πρόκειται για συνθετικά λιπαντικά, στα οποία η προσθήκη ουσιών προσδίδει ιδιότητες που δεν απαντώνται στα ορυκτέλαια. Ορισμένα συνθετικά λιπαντικά δεν είναι σε θέση να σχηματίσουν λιπαντικό φιλμ σε συνθήκες υψηλής πίεσης παρά την αργή μεταβολή του ιξώδους τους με τη θερμοκρασία με αποτέλεσμα να είναι ακατάλληλά σε πολλές περιπτώσεις για την λίπανση εδράνων.

1.2.2 Γράσα - υβριδική λίπανση

Τα γράσα είναι σημαντικά υλικά λίπανσης που χρησιμοποιούνται ευρέως σε μηχανολογικές εφαρμογές. Αποτελούνται από βασικό λιπαντικό έλαιο στο οποίο προστίθεται πυκνωτικό μέσο, συνήθως σαπωνόλιθος. Ο μηχανισμός λίπανσης των γράσων διαφέρει από εκείνο των υγρών λιπαντικών λόγω της διαφορετικής δομής των δυο μέσων και της συμπεριφοράς των πρώτων ως ρευστών Bingham και όχι ως νευτωνικών υγρών (1)

Τα γράσα παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα λιπαντικά έλαια:

- Μεγαλύτερο ιξώδες που διατηρείται σε υψηλές θερμοκρασίες
- Καλύτερη πρόσφυση στις επιφάνειες
- Μειωμένη τάση διαρροής από τις εφαρμογές
- Αυξημένη αντοχή σε φορτία και κρούσεις.

Ιδανικά για αργές κινήσεις και διακοπτόμενη λειτουργία όπως έδρανα κύλισης, οδοντωτούς τροχούς, κοχλίες. Η σωστή επιλογή γράσου βάσει θερμοκρασίας, ταχύτητας, φορτίων είναι κρίσιμη για αποτελεσματική λίπανση, μεγάλη διάρκεια ζωής και αξιόπιστη λειτουργία. Η κρίσιμες ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την λιβανική αποτελεσματικότητα ενός γράσου είναι η συνεκτικότητα και το σημείο στάξης που έχουμε αναφέρει προηγουμένως.

1.2.3 Στερεά Λιπαντικά

Τα στερεά λιπαντικά είναι υλικά που μειώνουν την τριβή μεταξύ επιφανειών παραμένοντας στη στερεά κατά τη χρήση κοινοί τύποι περιλαμβάνουν μαλακά μέταλλα υλικά άνθρακα πολυμερή και ανόργανες ενώσεις. Αυτά ελαχιστοποιούν την τριβή μέσω μηχανισμών όπου σχηματισμός λεπτών φιλμ τα οποία έχουν μικρή αντοχή σε διάτμηση.

Ο γραφίτης και το θειούχο μολυβδαίνιο (MoS_2) αποτελούν τα πιο συνήθη στερεά λιπαντικά και λειτουργούν λόγω των ασθενών δεσμών van der Waals μεταξύ των στοιβαγμένων επιπέδων της κρυσταλλικής δομής τους. Το απλό μολύβι λειτουργεί και αυτό λόγω αυτής της ιδιότητας αφού τα επίπεδα της κρυσταλλικής δομής του γραφίτη που βρίσκονται στη μύτη του μολυβιού εναποθέτονται με ευκολία πάνω στο χαρτί λόγω της μικρής διεθνής διατμητικής τους αντοχής.

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των στερεών λιπαντικών είναι η μεγάλη τους αντοχή στις θερμοκρασιακές αλλαγές αλλά και η ηλεκτρική αγωγιμότητα τους

για συγκεκριμένες εφαρμογές. Εντούτοις τα στερεά λιπαντικά μπορούν να λειτουργούν σε ακραία θερμοκρασιακά περιβάλλοντα χωρίς ιδιαίτερη συντήρηση για αυτό χρησιμοποιούνται και σε εφαρμογές αεροδιαστημικής.

Όμως υπάρχουν και πολλά μειονεκτήματα σε στερεά λιπαντικά. Αρχικά έχουν πολύ μεγάλες συντελεστή τριβής σε σχέση με τις υπόλοιπες κατηγορίες και άρα υπάρχουν μεγάλες απώλειες ενέργειας. Επιπλέον λόγω του τρόπου εφαρμογής των στερεών λιπαντικών που κατά κύριο λόγο γίνεται με επικάλυψη των επιφανειών είναι δύσκολη η αποβολή θερμότητας κατά τη διάρκεια της λειτουργίας. Τέλος η τραχύτητα μιας επιφάνειας επηρεάζει αρνητικά τη λιπαντική απόδοση του αφού δημιουργούνται διάκενα μεταξύ του λιπαντικού και της λιπαινόμενης επιφάνειας.

1.2.4 Αέρια Λιπαντικά

Τα αέρια λιπαντικά όπως για παράδειγμα το άζωτο, το ήλιο και ο ατμοσφαιρικός αέρας εμφανίζονται σε περιπτώσεις εξαιρετικά λεπτού φιλμ λιπαντικού. Τα πλεονέκτημά τους είναι το μεγάλο εύρος θερμοκρασιών κατά το οποίο μπορούν να λειτουργούν, είναι το αρκετά μικρό ιξώδες το οποίο συνεπάγεται πολύ μικρή τριβή και κατά συνέπεια δυνατότητα λειτουργίας σε πάρα πολύ υψηλές ταχύτητες, η χημική σταθερότητα τους για μεγάλο θερμοκρασιακό εύρος αλλά και το ελάχιστο περιβαλλοντικό τους αποτύπωμα το οποίο τα καθιστά πράσινα λιπαντικά. Το μεγαλύτερο μειονέκτημά τους όμως αφορά στη συμπίεστικότητα των αερίων. Για να υπάρξει ικανοποιητική λίπανση θα πρέπει τα αέρια να λειτουργούν σε πολύ μικρό διάκενο και υπό μεγάλη πίεση ενώ οι λιπενόμενες επιφάνειες να είναι πολύ λείες έτσι ώστε να μην δημιουργούνται ανεπιθύμητες τύρβες.

1.3 Μηχανισμοί λίπανσης

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως κάθε εφαρμογή απαιτεί μελέτη και σχεδιασμό έτσι ώστε να βρεθεί το καταλληλότερο είδος λίπανσης και λιπαντικού. Είπαμε πως τα στερεά λιπαντικά χρησιμοποιούνται συχνά σε ολισθαίνουσες επιφάνειες με υψηλά φορτία και αργές ταχύτητες. Η λίπανση με υγρά λάδια είναι η πιο διαδεδομένη σε εφαρμογές όπως έδρανα ολίσθησης οδοντωτούς τροχούς και υδραυλικά συστήματα όπου το λεπτό στρώμα λαδιού παρέχει καλή προστασία από τη φθορά. Η υβριδική λίπανση συνδυάζει στερεά και υγρά λιπαντικά ένα παράδειγμα είναι το γράσο. Το γράσο εφαρμόζεται σε έδρανα κύλισης.

Γενικά η υγρή λίπανση με τη μεγάλη γκάμα λιπαντικών που εμπίπτουν στην κατηγορία αποτελεί την πιο διαδεδομένη τεχνολογία λίπανσης. Τα λάδια προσφέρουν σημαντική προστασία στις λοιπές ενωμένες επιφάνειες απομακρύνουν ρύπους και ανεπιθύμητα στερεά σωματίδια από τη διεπιφάνεια λειτουργούν ως ψυκτικά μέσα και το κυριότερο, προσφέρουν επιθυμητό ιξώδες για διάφορες συνθήκες λειτουργίας (υψηλές ταχύτητες, υψηλές φορτίσεις κ.α.). Το κόστος τους είναι επίσης πολύ μικρό.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΣΤΕΡΕΑ ΛΙΠΑΝΤΙΚΑ	ΥΓΡΑ ΛΙΠΑΝΤΙΚΑ	ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΛΙΠΑΝΤΙΚΑ
Υδροδυναμική λίπανση	Μηδενική	Εξαιρετική	Μέτρια
Οριακή λίπανση	καλή έως εξαιρετική	φτωχή έως εξαιρετική αναλόγως των πρόσθετων	καλή έως εξαιρετική ανάλογα των προσθέτων
Ψυκτική δράση	Μηδενική	πολύ καλή	Φτωχή
Λίπανση συστημάτων υψηλών ταχυτήτων	Φτωχή	εξαιρετική	Πτωχή
Λίπανση συστημάτων χαμηλών ταχυτήτων	Καλή	Φτωχή(εξαιρετική στην υδροστατική περιοχή	Εξαιρετική
Λίπανση συστημάτων υψηλής φόρτισης	Καλή	Καλή	Φτωχή
Προστασία έναντι ατμοσφαιρικής διάβρωσης	Φτωχή	φτωχή έως εξαιρετική	καλή έως εξαιρετική
Κόστος	Υψηλό	χαμηλό έως πολύ υψηλό	υψηλό έως πολύ υψηλό

Πίνακας 1: Σύγκριση των τριών κατηγοριών λιπαντικών μέσων ως προς την απόδοσή τους υπό διάφορες συνθήκες λειτουργίας

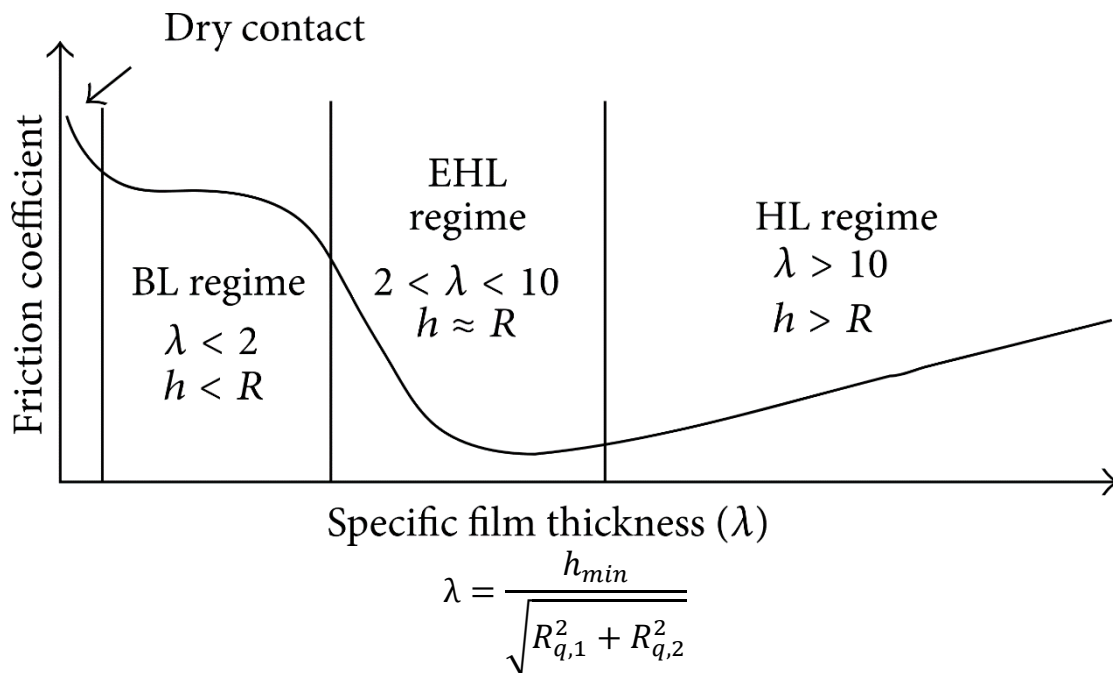
Στον παραπάνω πίνακα παρατηρείται ή σχετική υπεροχή των υγρών λιπαντικών. Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με την υγρή λίπανση και τους μηχανισμούς της.

2. Μηχανισμοί Υγρής Λίπανσης

Η έννοια των διαφορετικών περιοχών λίπανσης είναι πολύ σημαντική στον τομέα της τριβολογίας και του τριβολογικού σχεδιασμού. Τριβολογικές μελέτες οι οποίες διεξήχθησαν στις αρχές του εικοστού αιώνα από τους Stribeck και χαιρέτησε και άλλους αποκάλυψαν ότι η κατάσταση λίπανσης μεταβάλλεται ανάλογα με τις παραμέτρους λειτουργίες. Αυτή η γνώση ήταν κρίσιμη καθώς η ακατάλληλη λίπανση είχε ως αποτέλεσμα την υπερβολική

φθορά και βλάβη των μηχανολογικών συστημάτων της εποχής. Η σύνδεση μεταξύ των ακριβών περιοχών λίπανσης με βάση την ταχύτητα το φορτίο και το ιξώδες αποτυπώνεται γραφικά με την καμπύλη Stribeck. Η καμπύλη Stribeck απεικονίζει τον συντελεστή τριβής σε σχέση με την παράμετρο λίπανση Hersey. Η γνώση του καθεστώτος λίπανσης για δεδομένες συνθήκες λειτουργίας είναι απαραίτητη για την επιλογή των κατάλληλων λιπαντικών κατά τον σχεδιασμό των εξαρτημάτων και τον έλεγχο της τριβής και της φθοράς.

Μια αναθεωρημένη μορφή της καμπύλης Stribeck είναι αυτή που σχετίζει τον συντελεστή τριβής με την παράμετρο «λ».



Η παράμετρος λ ενέχει την ουσία του αριθμού Hersey που καθορίζεται από τις συνθήκες λειτουργίας του τριβικού συστήματος. Αυτή η σχέση μεταξύ λ και αριθμού Hersey είναι το h_{min} του λιπαντικού φιλμ το οποίο σύμφωνα με τις εργασίες τους Hamrock - Dowson και άλλων είναι συνάρτηση των συνθηκών λειτουργίας αλλά και κάποιων άλλων παραμέτρων. Αυτό που διαφοροποιεί την παράμετρο λ είναι η συμπερίληψη της μέσης τραχύτητας των δυο επιφανειών. Δείχνει ουσιαστικά το πώς αλλάζει η φάση της λίπανσης από την οριακή ($\lambda < 1$) στην μεικτή και ΕΥΔ ($1 < \lambda < 10$) μέχρι την υδροδυναμική ($\lambda > 10$) με το πώς αυξάνεται το πάχος του λιπαντικού σε σχέση με την μέση τραχύτητα.

2.1 Οριακή λίπανση

Στην περιοχή της οριακής λίπανσης ($\lambda < 2$), οι επιφάνειες βρίσκονται σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, το λιπαντικό δηλαδή έχει δημιουργήσει ένα πολύ λεπτό φιλμ. Έτσι οι εξάρσεις των δυο επιφανειών έρχονται συχνά σε επαφή μεταξύ τους. Το φιλμ σε αυτή την περίπτωση αποτρέπει την συγκόλληση των δυο εξάρσεων. Σε αυτή την φάση τα ρεολογικά χαρακτηριστικά δεν παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο. Τα φυσικοχημικά χαρακτηριστικά των επιφανειών και του λιπαντικού είναι οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν το φαινόμενο της οριακής λίπανσης.

Η οριακή λίπανση χαρακτηρίζεται από πολύ μεγάλο συντελεστή τριβής όπως φαίνεται και στην καμπύλη Stribeck. Ο συντελεστής κυμαίνεται από 0.03 με 0.20 όταν η λίπανση είναι επαρκής αλλά μπορεί να φτάσει και σε 0.5 όταν είναι μερική και πολλές από τις εξάρσεις εν τέλει συγκολλούνται και δημιουργούν τριβές ξηρού τύπου.

Το φαινόμενο της οριακής λίπανσης προκύπτει σε δύσκολες λειτουργικά συνθήκες ή όταν ο αριθμός Hersey είναι μικρός, και είναι δύσκολο να δημιουργηθεί ικανοποιητικό λιπαντικό φιλμ για υδροδυναμικού τύπου λίπανση. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η αιφνίδια έναρξη ή παύση μιας μηχανής κατά την οποία δεν έχει προλάβει να δημιουργηθεί το φιλμ, είναι οι συνθήκες χαμηλών ταχυτήτων ή υψηλών φορτίων, μπορεί να είναι επίσης στοιχεία με σφιχτή συναρμογή. Λιπαντικά με προσμίξεις μολυβδαινίου ή γραφίτη είναι ιδανικά για αυτές τις λειτουργίες. Παρατηρείται ότι οι προσμίξεις αυτές χρησιμοποιούνται και στην στερεή λίπανση και αυτό είναι λογικό αφού η φύση των φαινομένων είναι παρόμοια.

2.2 Μεικτή Λίπανση

Στην περιοχή της μεικτής λίπανσης οι επιφάνειες βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους μόνο που τώρα το ρευστό και τα ρεολογικά χαρακτηριστικά του παίζουν σημαντικό ρόλο. Η περιοχή αυτή που βρίσκεται μεταξύ της οριακής και της υδροδυναμικής συμβαίνουν σημαντικές μεταβολές στον συντελεστή τριβής των τριβοζεύγων για μικρές μεταβολές στις συνθήκες λειτουργίας. Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στην καμπύλη Stribeck. Λόγω αυτών των μεταβολών η μεικτή λίπανση χωρίζεται σε δυο υποπεριοχές την υδροστατική, που βρίσκεται πιο κοντά στην οριακή, και την ελστοϋδροδυναμική που είναι πιο κοντά στην υδροδυναμική. Και οι δυο περιοχές είναι πολύ σημαντικές για τα στοιχεία μηχανών αφού το εύρος λειτουργίας που καλύπτουν είναι το πιο σύνηθες στις πραγματικές εφαρμογές.

Η υδροστατική λίπανση εξορισμού αποτελεί μια ειδική κατηγορία λίπανσης κατά την οποία το λιπαντικό εισέρχεται μεταξύ των επιφανειών με την βοήθεια αντλίας πίεσης. Αυτή η εξαναγκασμένη ροή ρευστού διαχωρίζει τις δυο επιφάνειες ακόμα και σε συνθήκες απότομης έναρξης ή παύσης της κίνησης μεταξύ των δύο επιφανειών ή ακόμα και ακινησίας σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Η πεπιεσμένη ροή σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας μπορεί να διαχωρίσει της επιφάνειες εντελώς και να σχηματιστή ικανοποιητικό λιπαντικό φιλμ. Ως εκ τούτου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και υδροστατική λίπανση. Στην πραγματικότητα όμως λόγω του κόστους συντήρησης και λειτουργίας τέτοιων διατάξεων λίπανσης η χρήση τους περιορίζεται κυρίως σε τριβικά συστήματα μεγάλων πιέσεων με πολλές διακύμανσης στην ταχύτητα, συνθήκες που χωρίς την πεπιεσμένη ροή θα οδηγούσαν σε υψηλή τριβή. Έτσι η υδροστατική λίπανση επιλέγεται ως κομμάτι της μεικτής λίπανσης αφού ανάλογα με τις συνθήκες λειτουργίας βρίσκεται από την οριακή μέχρι και την υδροδυναμική περιοχή. Στην αρχή της υδροστατικής λίπανσης στηρίζεται και η λειτουργία των εδράνων που δέχονται υψηλές ώσεις στα ακραία τμήματα ατράκτων ηλεκτρογεννητριών και στροβιλοκινητήρων.

2.3 Ελστοϋδροδυναμική λίπανση

Αμέσως πριν την Υδροδυναμική περιοχή στο γράφημα Stribeck στην περιοχή της μεικτής λίπανσης βρίσκεται η ελστοϋδροδυναμική λίπανση ή εν συντομία ΕΥΔ λίπανση. Με τα υψηλά φορτία και τις υψηλές σχετικά ταχύτητες τα ρευστά λιπαντικά στην περιοχή αυτή πυκνώνουν και το ιξώδες τους αυξάνεται κατακόρυφα, οι ρεολογικές τους ιδιότητες δηλαδή μεταβάλλονται ραγδαία. Το λιπαντικό ωθείται μεταξύ των επιφανειών σε περιβάλλον υψηλής πίεσης παραμορφώνοντας ελαστικά τις επιφάνειες και δημιουργώντας την λιπαντική μεμβράνη πάχους δέκα φορές μεγαλύτερο της μέσης τραχύτητας (υδροδυναμικό φιλμ). Είναι τέτοια η πίεση και η αύξηση του ιξώδους που το ρευστό παίρνει την μορφή «γυαλιού» με αποτέλεσμα η λιπαντική μεμβράνη να μπορεί να παραλάβει πολύ μεγάλα φορτία.

Η σημασία του ελστοϋδροδυναμικού φαινομένου είναι πολύ μεγάλη αφενός διότι το υδροδυναμικό φιλμ που δημιουργείται είναι ικανό να παραλάβει φορτία της τάξης των GPa αφετέρου γιατί η παραμόρφωση των επιφανειών λειαίνει τις γεωμετρικές ανωμαλίες τους. Μικραίνει δηλαδή την τραχύτητα με αποτέλεσμα η αντίσταση λόγω τριβής να μηδενίζεται και η μοναδική αντίσταση που παρατηρείται στο φαινόμενο είναι οι διατμητικής τάσεις του φιλμ. Έτσι εξηγείται και η κατακόρυφη πτώση του συντελεστή τριβής στην καμπύλη Stribeck. Ουσιαστικά αυτό δηλώνει ότι αν και το πάχος του

λιπαντικού στην υδροδυναμική περιοχή είναι μεγαλύτερο από την περιοχή της ΕΥΔ οι τριβές είναι μεγαλύτερες και αυτό γιατί η υδροδυναμική περιοχή είναι πιο επιρρεπής στις συγκρούσεις των εξάρσεων των ταχυτήτων.

Ως εκ τούτου ο τριβολογικός σχεδιασμός στοιχείων μηχανών όπως των εδράνων κύλισης και των οδοντωτών τροχών γίνεται με στόχο την λειτουργία τους στην περιοχή ΕΥΔ λίπανσης αφού αυτά τα στοιχεία είναι που παραλαμβάνουν υψηλές σημειακές και γραμμικές φορτίσεις. Η ανάλυση του φαινομένου πρέπει να λαμβάνει υπόψη την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των επιφανειών, την γεωμετρία τους, τα ρεολογικά χαρακτηριστικά του λιπαντικού υπό καθεστώς υψηλών διατμήσεων και θερμοκρασιών και πολλές άλλες παραμέτρους, γι' αυτό και η ΕΥΔ λίπανση αποτελεί την πιο σύνθετη και πολύπλοκη μορφή λίπανσης.

Βασικό στοιχείο της ανάλυσης στον τριβολογικό σχεδιασμό είναι η επίλυση του προβλήματος ΕΥΔ επαφής. Αυτή επιτυγχάνεται κυρίως με την βοήθεια των εξισώσεων ρευστοδυναμικής Navier-Stokes για την περιγραφή της συμπεριφοράς του ρευστού λιπαντικού υπό συνθήκες υψηλών πιέσεων και δεδομένης γεωμετρίας και των εξισώσεων ελαστικής παραμόρφωσης από την θεωρία του Hertz. Η εξίσωση που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι η Reynolds δεδομένου ότι το ρευστό επιλέγεται ως Νευτώνειο με σταθερή πυκνότητα, ιξώδες και θερμοκρασία κατά μήκος της επαφής. Εκτενής περιγραφή της ανάλυσης γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

2.4 Υδροδυναμική λίπανση

Το δεξιότερο τμήμα της καμπύλης Stribeck που χαρακτηρίζεται από την σταδιακή αύξηση του συντελεστή τριβής αποτελεί ονομάζεται περιοχή υδροδυναμικής λίπανσης. Σε αυτή την περιοχή το λιπαντικό φιλμ είναι πολλαπλάσιο της μέσης τραχύτητας ($\lambda > 10$) και οι δυο επιφάνειες είναι εντελώς διαχωρισμένες μεταξύ του. Το μεγάλο πάχος του λιπαντικού κάνει την υδροδυναμική περιοχή κατάλληλη για σύμμορφες επιφάνειες αφού τις διαχωρίζει εντελώς, έτσι είναι εξαιρετικά αποδοτική στα έδρανα ολίσθησης. Η πληθώρα λιπαντικού μεταξύ των επιφανειών δρα και ως ψυκτικό για τις επιφάνειες.

Η δημιουργία του φιλμ στην υδροδυναμική περιοχή επηρεάζεται από τους εξής παράγοντες. Το λιπαντικό που παραλαμβάνει μόνο του το κάθετο φορτίο θα πρέπει να έχει υψηλό ιξώδες για να διατηρεί το πάχος του λιπαντικού. Η πρόσφυση του πρέπει να είναι μεγάλη έτσι ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος έκθλιψης του από την ζώνη υψηλών πιέσεων και θα πρέπει να κατανέμεται

ομοιόμορφα στο διάκενο. Οι επιφάνειες από την άλλη θα πρέπει να είναι σχετικά λείες αφού μεγάλες εξάρσεις μπορεί να διαταράξουν την στρωτή ροή του ρευστού μεταξύ των επιφανειών και να δημιουργηθούν προβλήματα στην λίπανση. Επίσης θα πρέπει η ταχύτητα να είναι υψηλή για να μπορεί να ωθεί το λιπαντικό με πίεση μέσα στις επιφάνειες και το φορτίο δεν πρέπει να ξεπερνάει την τάξη των MPa. Αυτοί οι περιορισμοί είναι που καθιστούν την υδροδυναμική λίπανση μια δύσκολη σχεδιαστικά περιοχή αλλά πολύ αποδοτική για την αποφυγή τριβών σε υψηλές ταχύτητες και μικρά φορτία.

3. Χαρακτηριστικά και Παράμετροι του Φαινομένου της ΕΥΔ λίπανσης

Η υγρή λίπανση δυο επιφανειών είναι ένα φαινόμενο που όπως εξηγήθηκε και παραπάνω είναι πολυπαραγοντικό. Χαρακτηριστικά όπως η γεωμετρία της επαφής, τα ελαστοπλαστικά χαρακτηριστικά των επιφανειών, τα ρεολογικά χαρακτηριστικά του λιπαντικού και οι συνθήκες λειτουργίας του τριβοζεύγους καθορίζουν την περιοχή λίπανσης του τριβοζεύγους και ως εκ τούτου είναι κρίσιμα για τον τριβολογικό σχεδιασμό.

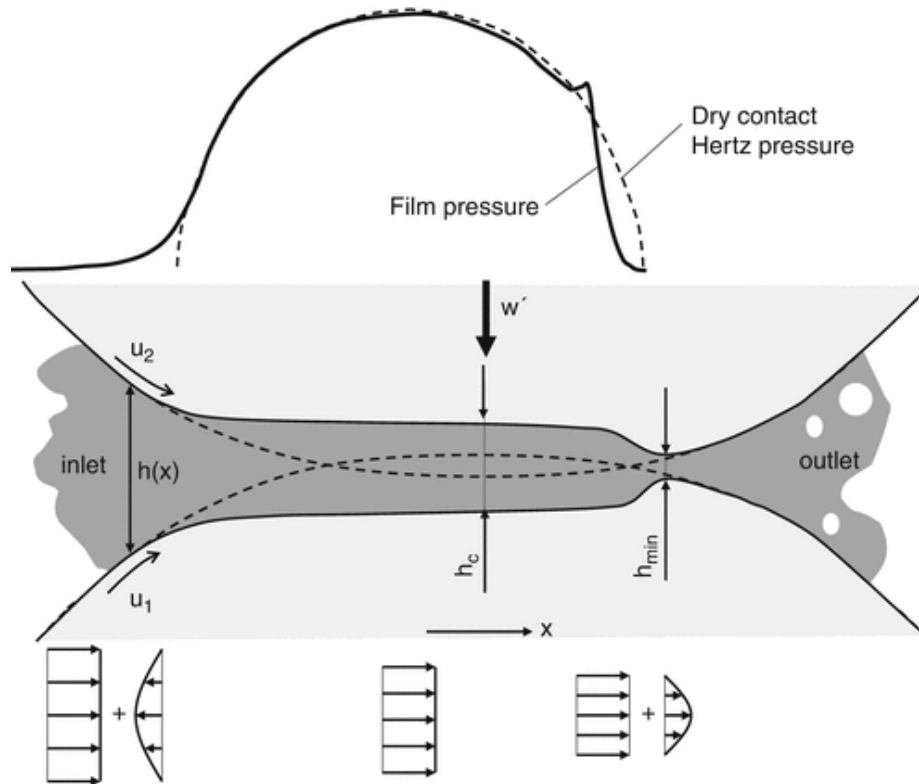
Η παρούσα εργασία ασχολείται με την περιοχή της ελστοϋδροδυναμικής και της υδροδυναμικής λίπανσης. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι παράμετροι διαφοροποιούνται ανάλογα με την περιοχή ενώ άλλες παράμετροι που επηρεάζουν την ΕΥΔ δεν επηρεάζουν καθόλου την υδροδυναμική περιοχή. Αυτό συμβαίνει λόγω της πολυπλοκότητας της ΕΥΔ λίπανσης. Παρακάτω αναλύονται σε βάθος τα χαρακτηριστικά και οι εξισώσεις τους.

3.1 Κατανομή πίεσης στην ΕΥΔ

Από την θεωρία Hertz που αναφέρθηκε προηγουμένως η πίεση μιας ξηρής επαφής έχει την χαρακτηριστικό παραβολοειδές προφίλ. Όταν τα σώματα αρχίζουν να κινούνται μεταξύ τους και το ενεργό ρευστό εισέλθει στην περιοχή επαφής δημιουργείται το υδροδυναμικό φιλμ με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η κατανομή της πίεσης. Λόγω τις εισόδου του πιεζο-ιξώδους λιπαντικού η περιοχή επαφής διευρύνεται με αποτέλεσμα το φορτίο να κατανέμεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια και ως εκ τούτου οι πιέσεις να μικραίνουν. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην είσοδο και την έξοδο του λιπαντικού, περιοχές μεγάλης σημασίας. Στην μέση της επαφής δηλαδή στην περιοχή των μεγάλων πιέσεων η κατανομή ακολουθεί αυτήν της ξηρής επαφής κατά Hertz γι' αυτό και η p_{max} έχει ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση της ελστοϋδροδυναμικής λίπανσης. Σε αυτήν την περιοχή οι επιφάνειες γίνονται παράλληλες και το πάχος του φιλμ σε αυτή την περιοχή ονομάζεται κεντρικό πάχος h_c .

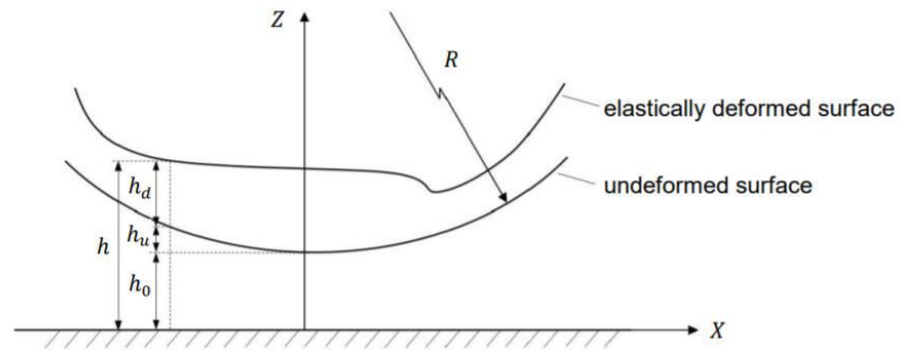
Το φαινόμενο της ελστοϋδροδυναμικής λίπανσης όπως και της υδροδυναμικής είναι η συνεχής αγωγή του ρευστού μέσα στην επαφή επομένως ισχύει η εξίσωση της συνέχειας και η παροχή διατηρείται σταθερή. Το ρευστό ωθείται με πίεση λόγω του ιξώδους και της πρόσφυσής του στις επιφάνειες που κινούνται με ταχύτητα μέσα στην επαφή. Στην έξοδο το ρευστό από την κατάσταση υψηλής πίεσης εξέρχεται σε περιβάλλον ατμοσφαιρικής πίεσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα-αίτιο την δημιουργία στένωσης στην περιοχή της εξόδου, ενός ιδιότυπου ακροφυσίου. Εκεί βρίσκεται και το ελάχιστο πάχος του λιπαντικού h_0 που αποτελεί σημαντική παράμετρο για την τριβολογική ανάλυση. Αυτή η στένωση βέβαια δημιουργεί ένα μέγιστο στην πίεση το οποίο ξεπερνάει την πίεση Hertz στο σημείο και έπειτα η πίεση πέφτει απότομα. Η

κορύφωση της πίεσης στην περιοχή της στένωσης είναι χαρακτηριστικό της υδροδυναμικής λίπανσης, πολλές φορές ξεπερνάει και την μέγιστη τιμή πίεσης Hertz.



3.2 Λιπαντικό Φιλμ στην ΕΥΔ

Το λιπαντικό φιλμ στην Ελστοϋδροδυναμική περιοχή είναι απόρροια της δημιουργίας του υδροδυναμικού φιλμ υπό συνθήκες ακραίων πιέσεων αλλαγών του ιξώδους. Το πάχος του λιπαντικού και η κατανομή πίεσης της επαφής είναι αλληλένδετα και επομένως οι μηχανισμοί που αναφέρθηκαν προηγουμένως επηρεάζουν εξίσου και το λιπαντικό φιλμ. Το σημαντικό που πρέπει να αναφερθεί και αφορά στην ανάλυση είναι η γεωμετρία του. Η γεωμετρία και οι εξισώσεις του φιλμ είναι πολύ βασικός παράγοντας για την ανάλυση αφού δίνει τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και είναι βασικός παράγοντας των εξισώσεων κίνησης των ρευστών. Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με την γεωμετρία λείου κυλίνδρου πάνω σε λεία επιφάνεια και έτσι μοντελοποιεί τα φαινόμενα. Σχηματικά η απεικόνιση του ελστοϋδροδυναμικού φαινομένου φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 3-2: Ανάλυση Λιπαντικού Φιλμ ΕΥΔ λίπανσης

Όπως φαίνεται του ελστοϋδροδυναμικού φιλμ h χωρίζεται σε τρία επιμέρους πάχη.

$$h(x) = h_0 + h_u(x) + h_d(x) \quad (3.1)$$

Το h_0 είναι το ελάχιστο κενό μεταξύ της επιφάνειας του κυλίνδρου και της πλάκας ή αλλιώς το ελάχιστο πάχος του λιπαντικού για το οποίο αναφέρθηκε παραπάνω. Το h_u είναι η μη παραμορφωμένη γεωμετρία του κυλίνδρου η οποία προσεγγίζεται σύμφωνα με την θεωρία Hertz ως παραβολή και είναι συνάρτηση της θέσης στην επαφή.

$$h_u(x) = \frac{x^2}{R} \quad (3.2)$$

Το R είναι η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας.

Το h_d αναφέρεται στην παραμόρφωση και είναι και αυτό συνάρτηση της θέσης. Σύμφωνα με την θεωρία ελαστικότητας των Timoshenko-Goudier η παραμόρφωση κάθε σημείου της επιφάνειας του κυλίνδρου στην θέση X είναι συναρτηση των πιέσεων στα σημεία $\hat{X}$ και του ισοδύναμου μέτρου ελαστικότητας των δυο επιφανειών. Η σχέση είναι η εξής:

$$h_d = -\frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{\infty} p(\hat{X}) \ln(|X - \hat{X}|) d\hat{X} \quad (3.3)$$

3.3 Υπολογισμός πάχους ΕΥΔ λίπανσης

Οι Hamrock και Dowson περιέγραψαν το φαινόμενο της ΕΥΔ και της δημιουργίας του λιπαντικού φιλμ και εξήγαγαν χρήσιμα συμπεράσματα από την πειραματική και αριθμητική τους ανάλυση. Ποιο συγκεκριμένα οι κύριοι παράγοντες που βρέθηκαν να επηρεάζουν το λιπαντικό φιλμ είναι η ταχύτητα των επιφανειών των σωμάτων, το ιξώδες του ρευστού υπό ατμοσφαιρικές συνθήκες, το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας, η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας, ο συντελεστής α πιεζο-ιξώδους, το φορτίο και η παράμετρος της ελλειπτικότητας της επαφής k που είναι ίση με τον λόγο a/b , όπου a το ημιαξόνιο της επαφής στην διεύθυνση x και b στην διεύθυνση y .

Πιο συγκεκριμένα για το k η σχέση που περιγράφει την ελλειπτικότητα είναι συνάρτηση των ακτινών καμπυλότητας στις δύο διευθύνσεις.

$$\bar{k} = 1.0339 \left(\frac{R_y}{R_x} \right)^{0.636} \quad (3.4)$$

Με δεδομένες τις ποσότητες και τις εξισώσεις των παραμέτρων οι εξισώσεις που περιγράφουν ελάχιστο πάχος h_0 και μέσο πάχος h_c είναι οι εξής:

$$\frac{h_c}{R'} = 2.69 \left(\frac{U\eta_0}{E'R'} \right)^{0.67} (\alpha E') \left(\frac{W}{E'R'^2} \right)^{-0.067} (1 - 0.61e^{-0.73k}) \quad (3.5)$$

$$\frac{h_0}{R'} = 3.63 \left(\frac{U\eta_0}{E'R'} \right)^{0.68} (\alpha E') \left(\frac{W}{E'R'^2} \right)^{-0.073} (1 - 0.61e^{-0.68k}) \quad (3.6)$$

- U η μέση ταχύτητα των επιφανειών $U = \frac{(u_1+u_2)}{2}$ [m/s]
- η_0 ιξώδες του ρευστού υπό ατμοσφαιρικές συνθήκες [Pa s]
- E' ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας [Pa]
- R' ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας [m]
- α συντελεστής πιεζο-ιξώδους [m]
- W φορτίο [N]
- k

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν αδιάστατες παράμετροι:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{h}{R'} && \text{αδιάστατη παράμετρος φιλμ} \\
 U &= \left(\frac{U\eta_0}{E'R'} \right) && \text{αδιάστατη παράμετρος ταχύτητας} \\
 G &= (\alpha E') && \text{αδιάστατη παράμετρος υλικών} \\
 \bar{W} &= \left(\frac{W}{E'R'^2} \right) && \text{αδιάστατο φορτίο} \\
 k &= \frac{a}{b} && \text{ελλειπτικότητα}
 \end{aligned}$$

3.4 Επίδραση των Αδιάστατων Παραμέτρων στην Κατανομή Πίεσης και στο Προφίλ του ΕΥΔ Φιλμ

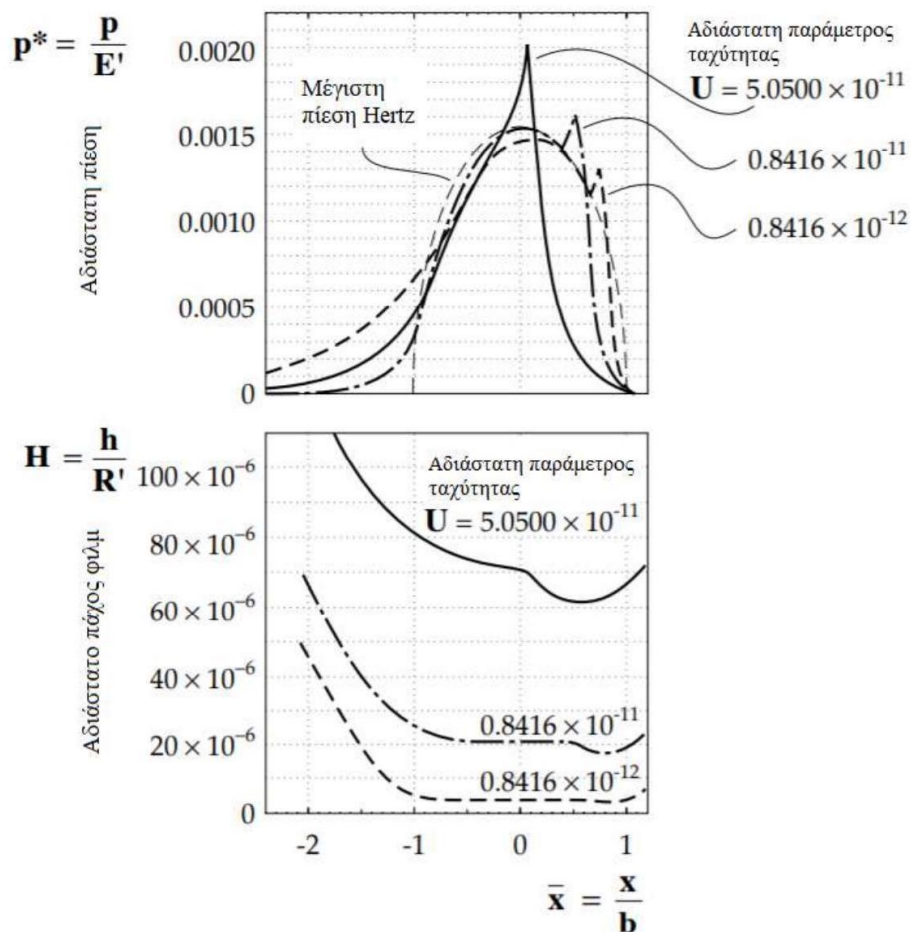
Οι πιέσεις αλλά και το πάχος του φιλμ επηρεάζονται από τις αδιάστατες παραμέτρους αλλά όπως είναι λογικό κάποιες παράμετροι έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα έναντι κάποιων άλλων. Αυτό φαίνεται άλλωστε και από την δύναμη που είναι υψωμένη η κάθε παράμετρος. Η βαρύτητα των παραμέτρων ελέγχθηκε πειραματικά από τους Hamrock και Dowson κρατώντας σταθερές όλες της παραμέτρους και μελετώντας μια κάθε φορά. Έτσι προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

3.4.1 Επίδραση της παραμέτρου της ταχύτητας.

Η παράμετρος της ταχύτητας έχει μεγάλη επίδραση στην ΕΥΔ επαφή λόγω της ανάγκης για σχετική κίνηση για την δημιουργία ενός πεδίου υδροδυναμικής πίεσης. Η ταχύτητα στην εργασία των Hamrock-Dowson εξετάζεται σε ένα εύρος 2 τάξεων μεγέθους και από τα αποτελέσματα παρατηρούνται σημαντικές αλλαγές. Στο παρακάτω διάγραμμα (3.2) δείχνεται η επίδραση της παραμέτρου ταχύτητας U στην πίεση και στο προφίλ του φιλμ . Οι υπολογισμοί για την πίεση και το φιλμ έγιναν με σταθερές τις παραμέτρους, $k = 6$, $W = 7.371 \times 10^{-7}$ και $G = 4.522 \times 10^3$.

Στην περιοχή εισόδου παρατηρείται μία σταδιακή αύξηση της πίεσης , ενώ στην περιοχή εξόδου από την Hertz επαφή η πίεση μειώνεται . Η απότομη αύξηση της ταχύτητας παραμορφώνει το προφίλ Hertz της πίεσης σε ένα προφίλ με μία πολύ απότομη κορυφή. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει επιφανειακά βλάβη στο υλικό αν δεν έχει γίνει προσεκτικός σχεδιασμός. Η

απότομη πτώση στο προφίλ της πίεσης ενδέχεται επίσης να προκαλέσει σπηλαιώση του λιπαντικού. Κατά την μείωση της παραμέτρου ταχύτητας το προφίλ πίεσης επανέρχεται στη μορφή Hertz εμφανίζοντας στην έξοδο της στένωσης μία κορυφή πίεσης. Όσον αφορά την επίδραση της ταχύτητας στο πάχος του φιλμ όταν αυτή αυξάνεται, αυξάνεται το πάχος του φιλμ, όπου οι επιφάνειες είναι σχεδόν παράλληλες μειώνεται η αναλογία της περιοχής επαφής, τέλος, αυξάνεται η αναλογία της καλυπτόμενης επιφάνειας επαφής από την στένωση εξόδου. Μεγαλύτερο πάχος λιπαντικού σημαίνει και βελτιωμένη παραλαβή φορτίων από το λιπαντικό ενώ είναι και η πιθανότητα αλληλεπίδρασης των ταχυτήτων μειώνεται επίσης. Μια ακόμα επίπτωση της αύξησης της ταχύτητας είναι η ενεργειακές απώλειες λόγω των διατμήσεων του λιπαντικού. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια η αύξηση της ταχύτητας άρα και του αριθμού Hersey μετακινεί την θέση λειτουργίας στην Stribeck δεξιότερα από την περιοχή της ΕΥΔ άρα αυξάνεται και ο συντελεστής τριβής.



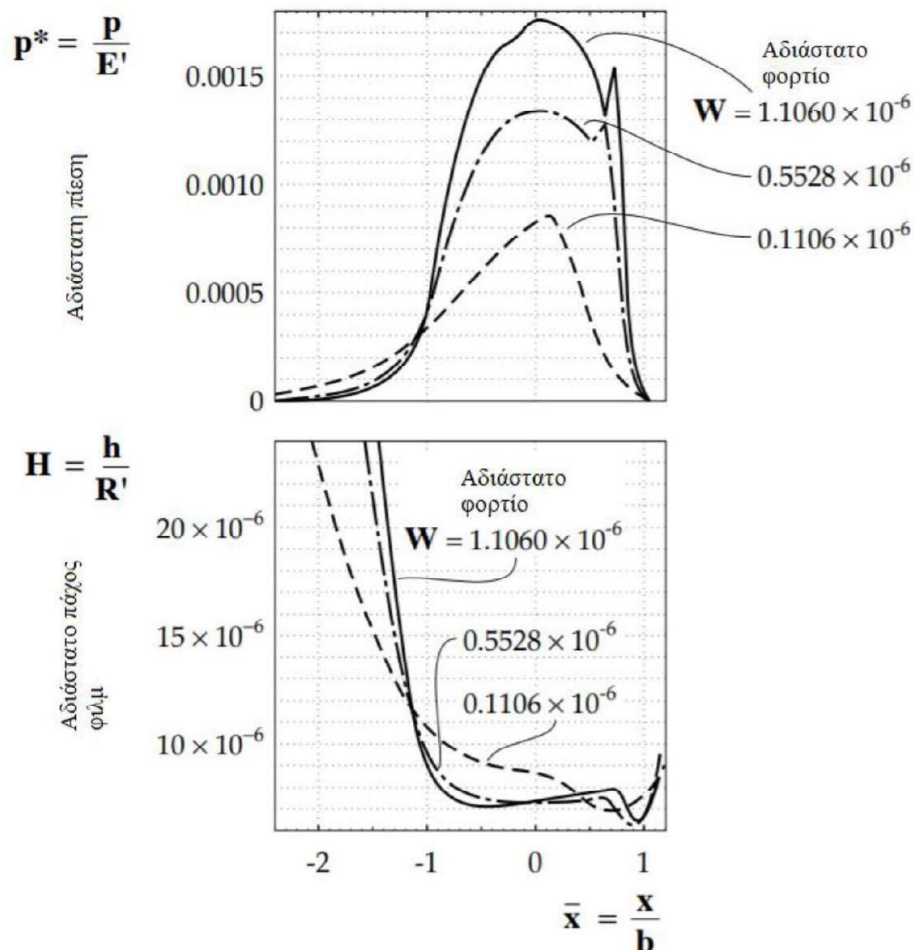
Εικόνα 3-3: Επίδραση της ταχύτητας στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.

3.4.2 Επίδραση της παραμέτρου του φορτίου.

Επίδραση της παραμέτρου φορτίου. Η παράμετρος του φορτίου επιδρά σημαντικά στο πάχος του φιλμ και κυρίως στο φιλμ ελαχίστου πάχους στην στένωση της εξόδου. Στο παρακάτω διάγραμμα 3.3 δείχνεται η επίδραση διάφορων φορτίων στην πίεση και στο πάχος του φιλμ, με σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους: $k = 6$, $U = 1.683 \times 10^{-12}$ και $G = 4.522 \times 10^3$.

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 4.2, καθώς το φορτίο αυξάνεται η πίεση είναι περιορισμένη εντός της ονομαστικής περιοχής της επαφής Hertz. Επίσης, με την αύξηση του φορτίου στην εισόδο της περιοχής επαφής η πίεση μειώνεται. Ακόμη παρατηρείται μείωση πάχους του φιλμ ανάμεσα στην είσοδο και στην στένωση, αυτό οφείλεται στην συμπίεστικότητα του λιπαντικού. Είναι λογικό να μειώνεται το πάχος του φιλμ όσο αυξάνεται το φορτίο, ωστόσο αυτό γίνεται μέχρι ένα σημείο καθώς γίνεται ανεξάρτητο από

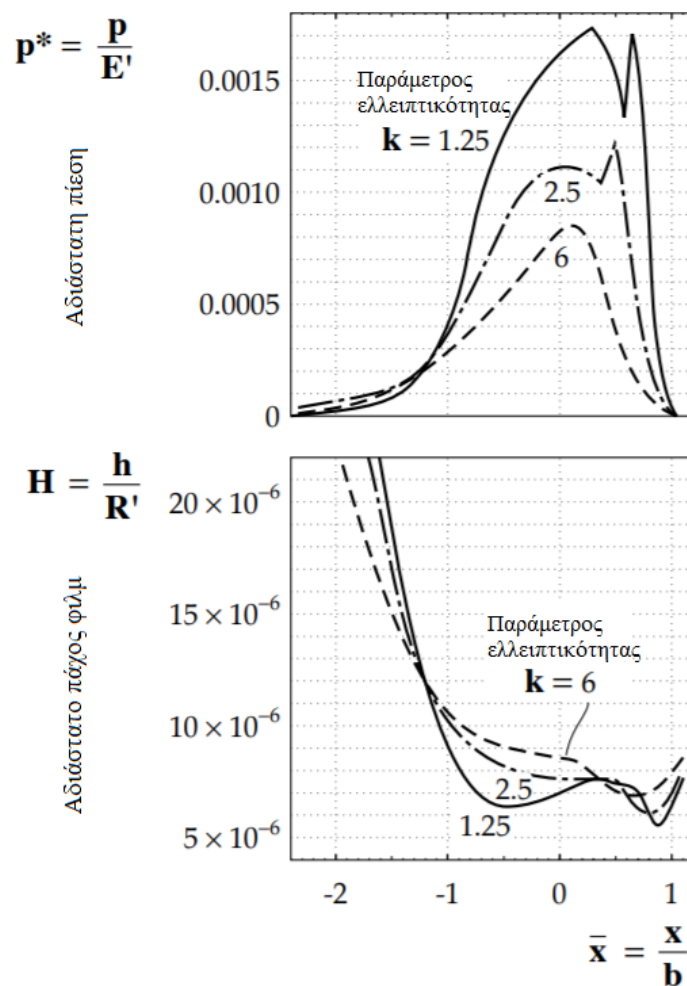
το φορτίο. Στην ΕΥΔ λίπανση αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο χαρακτηριστικό, παρόλα αυτά το πάχος του ελαχίστου φιλμ δεν μειώνεται σημαντικά με την αύξηση του φορτίου.



Εικόνα 3-4: Επίδραση του φορτίου στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.

3.4.3 Επίδραση της παραμέτρου της ελλειπτικότητας.

Το προφίλ της πίεσης και το πάχος του φιλμ επηρεάζονται σημαντικά από την ελλειπτικότητα. Στο παρακάτω διάγραμμα 3.4 φαίνονται οι επιδράσεις στην πίεση και στο πάχος του φιλμ για τιμές του της παραμέτρου ελλειπτικότητας k από 1.25 έως 6 με σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους: $U = 1.683 \times 10^{-12}$, $W = 1.106 \times 10^{-7}$, $G = 4.522 \times 10^3$. Το πάχος του φιλμ αυξάνεται όσο μεγαλώνει η τιμή του και αυτό οφείλεται στην διεύρυνση της επαφής και κατά συνέπεια στην δημιουργία μιας υδροδυναμικής πίεσης αποτρέποντας έτσι την πλευρική απώλεια λιπαντικού.



Εικόνα 3-5: Επίδραση της ελλειπτικότητας στα προφίλ της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.

3.5 Ακριβέστερες σχέσεις για τον υπολογισμό του ΕΥΔ λιπαντικού φιλμ

Αν και οι εξισώσεις για το πάχος του φιλμ για ΕΥΔ λίπανση χρησιμοποιούνται στο μεγαλύτερο αριθμό ΕΥΔ επαφών, ενδέχεται να υπάρχουν κάποιες μηχανολογικές εφαρμογές όπου επιβάλλεται να χρησιμοποιηθούν σχέσεις που θα δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν ακριβή αποτελέσματα για επαφές κάτω από αρκετά μεγάλα φορτία, και οι ελαστικές παραμορφώσεις και οι μεταβολές των τιμών του ιξώδους με την πίεση είναι αξιοσημείωτες. Παρόλα αυτά, σε άλλες εφαρμογές όπως για παράδειγμα τα έδρανα κυλίσσεως που εμφανίζονται μικρά φορτία και η ελαστική παραμόρφωση και το ιξώδες δεν διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο, η επαφή θεωρείται ως ΕΥΔ. Η ελαστική παραμόρφωση και το ιξώδες του λιπαντικού εξαρτώνται κατά κύριο λόγο από το μέτρο ελαστικότητας και το επιβαλλόμενο φορτίο. Με βάση το μέγεθος του φορτίου και τις ιδιοτήτων των υλικών, υπάρχει εν μέρει η δυνατότητα να ευρεθούν οι μεταβολές στην γεωμετρία του φιλμ και το ιξώδες του λιπαντικού. Βασικά τέσσερις περιοχές λίπανσης διακρίνονται στο πλήρες ΕΥΔ φιλμ, όπου η καθεμία προσδιορίζεται από τις λειτουργικές συνθήκες και τις ιδιότητες του υλικού.

Για τον ακριβέστερο υπολογισμό του ελαχίστου πάχους έχουν δημιουργηθεί οι περιοχές

- ισο-ιξώδους -άκαμπτου σώματος
- πιεζο -ιξώδους άκαμπτου σώματος
- ισο -ιξώδους ελαστικού σώματος
- πιεζο -ιξώδους ελαστικού σώματος

Αρχικά, για τον υπολογισμό του ελάχιστου πάχους του φιλμ πρέπει να εκτιμηθεί ποιος μηχανισμός της ΕΥΔ εφαρμόζεται στην συγκεκριμένη επαφή και στην συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η κατάλληλη σχέση. Οι αδιάστατοι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω σχέσεις για τον υπολογισμό πάχους του φιλμ μπορούν να μειωθούν κατά μία παράμετρο. Παρακάτω παρατίθενται οι νέες παράμετροι:

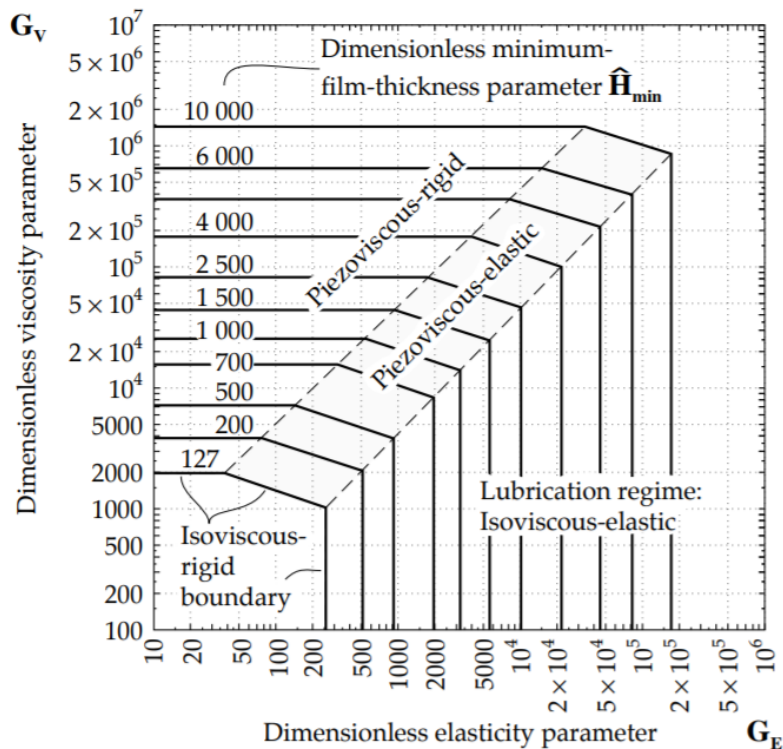
$$\hat{H} = H \left(\frac{W}{U} \right)^2 \text{ αδιάστατο φιλμ}$$

$$G_v = \frac{GW^3}{U^2} \text{ αδιάστατη παράμετρος ιξώδους}$$

$$G_E = \frac{W^{8/3}}{U^2} \text{ αδιάστατη παράμετρος ελαστικότητας}$$

$$k = \frac{a}{b} \text{ ελλειπτικότητα}$$

Για την εύρεση πάχους του λιπαντικού φιλμ πρέπει να ορισθεί ο μηχανισμός λίπανσης ώστε να επιλεχθούν οι κατάλληλες σχέσεις για τον υπολογισμό του. Οι Hamrock και Dowson ανέπτυξαν ένα χάρτη για τον καθορισμό του μηχανισμού λίπανσης. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται ο χάρτης με την τιμή της ελλειπτικής παραμέτρου $k=1$.



Εικόνα 3-6: Περιοχές μηχανισμών λίπανσης για παράμετρο ελλειπτικότητας $k=1$

3.5.1 Ισο-ιζώδες άκαμπτου σώματος

Ο μηχανισμός ισο-ιζώδους άκαμπτου σώματος συνήθως συναντάται στα έδρανα κύλισης τα οποία δέχονται μικρό φορτίο. Στην περίπτωση του μηχανισμού αυτού, οι ελαστικές παραμορφώσεις μπορούν να μην ληφθούν υπόψιν διότι είναι πολύ μικρές. Επίσης, λόγω της αρκετά χαμηλής πίεσης του μέγιστου φιλμ, το ιζώδες δεν αυξάνεται σημαντικά. Το αδιάστατο ελάχιστο και κεντρικό πάχος του φιλμ υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\hat{H}_{\min} = \hat{H}_c = 128a_a\lambda_b \left[0.131 \tan^{-1} \left(\frac{a_a}{2} \right) + 1.683 \right]^2 \quad (3.7)$$

Οι συντελεστές a_a και λ_b είναι συναρτήσεις του μέτρου ελλειπτικότητας. Έτσι προκύπτει πως η σχέσεις επηρεάζονται μόνο από την απαραμόρφωτης γεωμετρίας επαφής.

3.5.2 Πιεζο-ιζώδες άκαμπτου σώματος

Στον μηχανισμό πιεζο-ιζώδους άκαμπτου σώματος, οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι αμελητέες αφού είναι πολύ μικρές. Ωστόσο, η πίεση του φιλμ είναι πολύ υψηλή άρα και το ιζώδες αυξάνεται σημαντικά. Αυτός ο τύπος μηχανισμού συναντάται στα κωνικά έδρανα κυλίσεως τα οποία δέχονται φορτίο μετρίου μεγέθους, στα χιτώνια των κυλίνδρων και σε μερικούς δακτυλίους των εμβόλων. Από την παρακάτω σχέση (3.7) υπολογίζεται το ελάχιστο και κεντρικό πάχος του φιλμ για τον συγκεκριμένο μηχανισμό.

$$\hat{H}_{\min} = \hat{H}_c = 1.66G_v^{2/3}(1 - e^{-0.68k}) \quad (3.8)$$

3.5.3 Ισο-ιζώδες ελαστικού σώματος

Στην περίπτωση αυτή, το φιλμ επηρεάζεται από τις ελαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Το ιζώδες του λιπαντικού δεν αυξάνεται, λόγω του ότι οι πιέσεις μπορεί να είναι αρκετά χαμηλές ή διαφορετικά το ιζώδες να μην παρουσιάζει ευαισθησία στις πιέσεις. Αυτός ο μηχανισμός συναντάται συνήθως στις επαφές σωμάτων χαμηλού μέτρου ελαστικότητας, όπως είναι τα ελαστικά, οι αρθρώσεις των ανθρώπων κλπ. Ένα παράδειγμα

τέτοιου λιπαντικού είναι το καθαρό νερό. Με τις παρακάτω σχέσεις υπολογίζονται το ελάχιστο και το κεντρικό πάχος του φιλμ αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\min} &= 8.70G_E^{0.67}(1 - 0.85e^{-0.31k}) \\ \hat{H}_c &= 11.15G_E^{0.67}(1 - 0.72e^{-0.28k})\end{aligned}\quad (3.9)$$

3.5.4 Πιεζο-ιζώδεις ελαστικού σώματος

Σε συνθήκες πιεζο-ιζώδους ελαστικού σώματος, το πάχος του φιλμ εξαρτάται από την ελαστική παραμόρφωση και το ιζώδες. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσεται μία πλήρως ανεπτυγμένη ελστοϋδροδυναμική λίπανση και συναντάται στα έδρανα κυλίσεως, τους εκκεντροφόρους, τους ολισθητήρες και τα γρανάζια. Το ελάχιστο και το κεντρικό πάχος του φιλμ υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις αντίστοιχα:

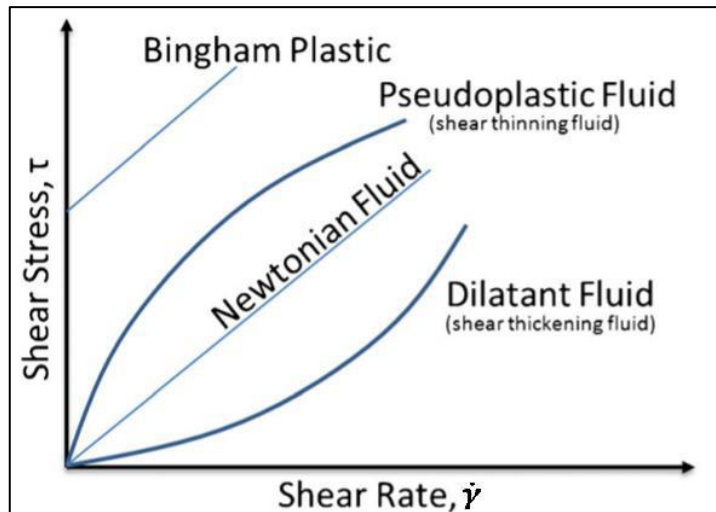
$$\begin{aligned}\hat{H}_{\min} &= 8.70G_E^{0.67}(1 - 0.85e^{-0.31k}) \\ \hat{H}_c &= 11.15G_E^{0.67}(1 - 0.72e^{-0.28k})\end{aligned}\quad (3.10)$$

3.6 Δυναμικό Ιζώδες

Το δυναμικό ιζώδες ενός ρευστού αποτελεί το μέτρο της αντίστασης στην ροή του υπό επιβαλλόμενες εξωτερικές δυνάμεις και οφείλεται στην εσωτερική τριβή μεταξύ των στοιβάδων του. Εξαρτάται από την πίεση, την θερμοκρασία τον ρυθμό διάτμησης αλλά και το ιστορικό διατμητικής τάσεις ή την κόπωση του. Ως εκ τούτου δεν είναι σταθερή ιδιότητα αλλά μεταβαλλόμενη ειδικά στα λιπαντικά που λειτουργούν σε ακραίες συνθήκες.

Στην περίπτωση που το ιζώδες ενός ρευστού δεν εξαρτάται από τον ρυθμό και το ιστορικό διάτμησης, τότε το ρευστό αυτό καλείται ως Νευτωνικό. Οπότε, σε ένα Νευτωνικό ρευστό η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και του ρυθμού διάτμησης είναι γραμμική και το ιζώδες του μπορεί να αλλάξει μόνο λόγω της πίεσης και της θερμοκρασίας.

Η άλλη κατηγορία ρευστών είναι τα μη Νευτωνικά στα οποία το ιζώδες εξαρτάται από τον ρυθμό και το ιστορικό διάτμησης και η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και του ρυθμού διάτμησης δεν είναι γραμμική. Ωστόσο και στα μη Νευτωνικά ρευστά το ιζώδες επηρεάζεται από το την θερμοκρασία και την πίεση. Στην παρακάτω εικόνα 7.2 δείχνονται οι κατηγορίες των μη Νευτωνικών ρευστών.



Εικόνα 3-7: Ιδιότητες των μη Νευτωνικών ρευστών

Στην περίπτωση της υδροδυναμικής λίπανσης όπου τα φορτία είναι της τάξης των MPa το ιξώδες είναι σχετικά ανεξάρτητο από την πίεση. Στην περίπτωση της ΕΥΔ λίπανσης όμως, το λιπαντικό παραλαμβάνει τεράστια φορτία τυπικά της τάξης των GPa με αποτέλεσμα το ιξώδες του ρευστού αυξάνεται ραγδαία αλλάζοντας τελείως το φαινόμενο της λίπανσης. Αυτή η σχέση μεταξύ ιξώδους και πίεσης μελετήθηκε εκτενώς από τους Roelands, Barus και Hamrock οι οποίοι ανέπτυξαν εμπειρικές σχέσεις για το πιεζο-ιξώδες.

- Εξίσωση Roelands

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{A \cdot (1+B \cdot \log(P))^n} \quad (3.11)$$

Η εξίσωση αυτή αναγνωρίζει την λογαριθμική σχέση μεταξύ πίεσης και ιξώδους. Το η είναι η τιμή του ιξώδους σε δεδομένη πίεση. Το η_0 αποτελεί χαρακτηριστικό του ιξώδους και ονομάζεται αρχικό ιξώδες και είναι η τιμή του υπό κανονικές συνθήκες και οι παράγοντες A, B, n είναι σταθερές από πειραματικά δεδομένα. Η εξίσωση αυτή αποτελεί μια πολύ ακριβή και πειραματικά ευσταθή επιλογή.

- Εξίσωση Barus

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + C \cdot P)^n \quad (3.12)$$

Η εξίσωση Barus είναι πιο απλή και αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιείται. Είναι γραμμική και αυτό της δίνει ένα υπολογιστικό πλεονέκτημα όταν δεν είναι τόσο σημαντική η τιμή του ιξώδους.

- Εξίσωση Hamrock

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{A \cdot (1+B \cdot P)^Z} \quad (3.13)$$

Η εξίσωση του Hamrock είναι γραμμική μεν αλλά ο παράγοντας Z εκφράζει καλύτερα την λογαριθμική σχέση πίεσης ιξώδους από ότι η Barus κάνοντάς την πιο ακριβή.

3.7 Πυκνότητα λιπαντικού

Η πυκνότητα του λιπαντικού αυξάνεται με την πίεση. Για την απλοποίηση των υπολογισμών η εξάρτηση πυκνότητας πιέσεις περιγράφεται από την εξής εξίσωση:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{0.6p}{1 + 1.7p} \right) \quad (3.14)$$

p είναι η πίεση που μέτρα της σε GPa

4. Θεωρία Πεπερασμένων Διαφορών FDM – Μοντελοποίηση Λίπανσης σε μη Σύμμορφες Επαφές

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις των παραμέτρων της υγρής λίπανσης που εξηγήθηκαν παραπάνω είναι η θεωρία πάνω στην οποία στηρίζεται η μοντελοποίηση των φαινομένων και οι επίλυση των προβλημάτων λίπανσης υπολογιστικά. Το γιατί γίνεται αυτή η επίλυση του προβλήματος της λίπανσης ξανά και ξανά από τους μηχανικούς είναι μια εύλογη απορία μιας και όπως φαίνεται παραπάνω έχει δημοσιευτεί πλήθος εργασιών που αφορούν στην επίλυση του. Η πραγματικότητα όμως είναι πως το φαινόμενο της λίπανσης και τα υπολογιστικά μοντέλα που το περιγράφουν έχουν ακόμα περιθώρια

βελτίωσης και αυτό συμβαίνει για πολλούς λόγους. Για αρχή οι υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται μπορούν να μειώσουν τα σφάλματα περιγράφοντας και διακριτοποιώντας καλύτερα την γεωμετρία του προβλήματος. Στόχος είναι επίσης η δημιουργία μοντέλων με ευρύτερο φάσμα συνθηκών λειτουργίας και παραμέτρων που επηρεάζουν την λίπανση και δει την ελστοϋδροδυναμική που όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια είναι πολυπαραγοντικό φαινόμενο. Με την πρόοδο της τεχνολογίας που ζητά συνεχώς νέες σύνθετες λύσεις για την βελτιστοποίηση της ποιότητας και απόδοσης της λίπανσης στόχος είναι να προσομοιωθεί και να μελετηθεί το φαινόμενο με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια.

Στην παρούσα εργασία που στόχο έχει να εισάγει τον αναγνώστη στην έννοια της λίπανσης και τα χαρακτηριστικά της, λύνεται το ρευστοδυναμικό πρόβλημα της γραμμικής (1d) ΕΥΔ λίπανσης μη σύμμορφης επιφάνειας με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

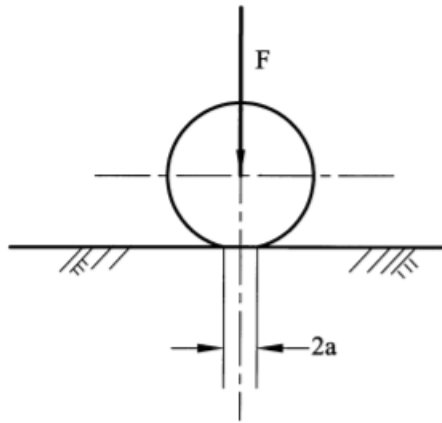
4.1 Θεωρία Hertz και θεωρητική γραμμή επαφής

Η βάση της θεωρίας Hertz είναι πως με την εφαρμογή ενός φορτίου σε μια επιφάνεια σχηματίζεται μια επιφάνεια λόγω της παραμόρφωσης του υλικού ή οποία παραλαμβάνει το φορτίο και αυτό είναι λογικό αφού αν το εμβαδόν ήταν μηδενικό τότε οι τάσεις στο σημείο θα ήταν άπειρες. Για να προχωρήσει στην ποσοτική μελέτη του φαινομένου θεώρησε πως οι παραμορφώσεις είναι ελαστικές, πως τα φορτία εφαρμόζονται κάθετα στην επιφάνεια άρα και οι διατρητικές τάσεις είναι κρίνονται αμελητέες και τέλος πως η επιφάνεια επαφής είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας των σωμάτων που δέχονται την φόρτιση.

Οι εξισώσεις που αναφέρονται παρακάτω είναι για την περίπτωση της επαφής κυλίνδρου πάνω σε επιφάνεια. Χωρίς την επίδραση του φορτίου η επαφή είναι μονοδιάστατη, μια γραμμή δηλαδή. Με την επιβολή του φορτίου η γραμμή μεταβάλλεται σε μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου. Το πλάτος της περιοχής είναι ίσο με $2a$ και προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$a = R_x \left(\frac{8\bar{W}}{\pi} \right)^{1/2}$$

(4.1)

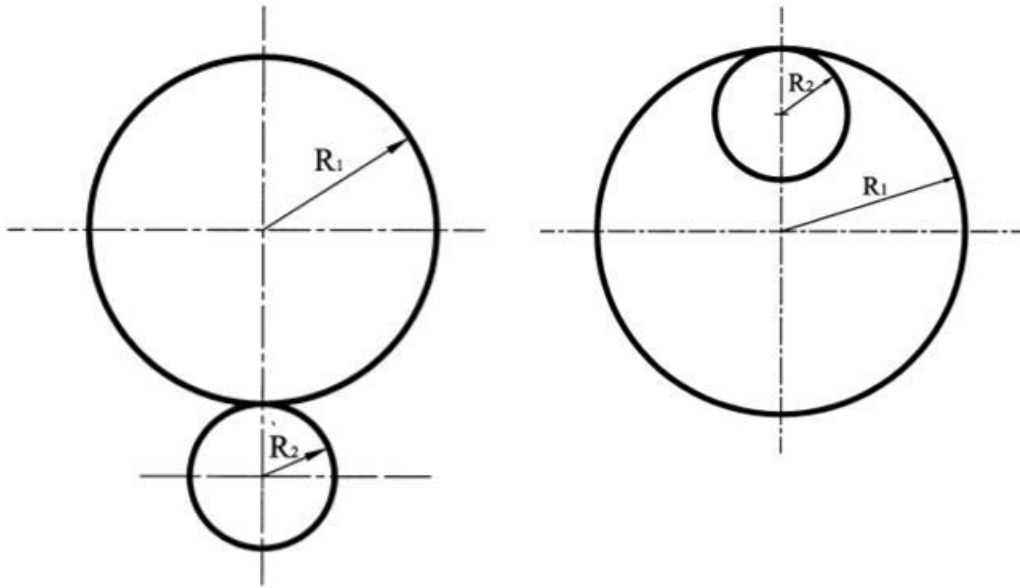


Εικόνα 4-1: Θεωρητική γραμμή επαφής Hertz

Όπου το $\bar{W}$ είναι το αδιάστατο φορτίο και δίνεται από την εξής:

$$\bar{W} = \frac{W}{LE'R_x} \quad (4.2)$$

Το W είναι το φορτίο που επιβάλλεται πάνω στην περιοχή επαφής, το L είναι το μήκος του κυλίνδρου, ενώ το E_{eq} είναι το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας και το R_x είναι η ακτίνα καμπυλότητας της επαφής η οποία στην περίπτωση του κυλίνδρου είναι ίση με την ακτίνα του καμπυλότητας. Οι επαφές των επιφανειών στις οποίες μελετιούνται τα φαινόμενα είναι πολύ μικρές. Σε τέτοια μεγέθη οι επαφές χωρίζονται σε μόλις δυο κατηγορίες, στις κοίλες ή σύμμορφες (έδρανα ολίσθησης-κύλισης) και τις κυρτές ή μη σύμμορφες (γρανάζια) όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 4-2: Παράδειγμα μη-σύμμορφης (αριστερά) και σύμμορφης (δεξιά) επαφής

Στην προσέγγιση του Reynolds οι επαφές απλοποιούνται τελικά σε επαφή μεταξύ κυλίνδρου και επιφάνειας οπότε και η ακτίνα του κυλίνδρου είναι ίση με την ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας της αρχικής επαφής. Η ισοδύναμη ακτίνα επαφής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \quad (4.3)$$

Με θετικό πρόσημο υπολογίζονται οι μη σύμμορφες ενώ με αρνητικό αντίστοιχα η σύμμορφες.

Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας της επαφής δίνεται από τον τύπο

$$\frac{2}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (4.4)$$

Όπου ν_1 και ν_2 είναι οι αριθμοί Poisson των δυο υλικών και E_1 E_2 είναι τα μέτρα ελαστικότητας τους αντίστοιχα. Όταν τα υλικά είναι τα ίδια οι εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$$E_{eq} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Η μέγιστη παραμόρφωση του κυλίνδρου για την γραμμική επαφή δίνεται από την σχέση:

$$\delta_m = \frac{2\bar{W}R_x}{\pi} \left[\ln \left(\frac{2\pi}{\bar{W}} \right) - 1 \right]$$

Σημαντικό χαρακτηριστικό της επαφής Hertz είναι η κατανομή της πίεσης πάνω στην επαφή. Το σχήμα της είναι παραβολικό με μέγιστη τιμή το $p_{\max}$ το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$p_{\max} = E_{eq} \left(\frac{\bar{W}}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

4.2 Δυναμικές εξισώσεις κίνησης των ρευστών

Εξισώσεις Navier-Stokes

Τα λιπαντικά στην υδροδυναμική λίπανση αλλά και σε πολλές περιπτώσεις στην ΕΥΔ λίπανση είναι νευτώνεια και αυτό σημαίνει πως το ιξώδες και ο ρυθμός διάτμησης έχουν γραμμική σχέση. Πέραν τούτου η ροή του λιπαντικού θεωρείται στρωτή. Ο Navier (1823) και ο Stokes (1845) ανέπτυξαν εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την ροή ενός ρευστού βασισμένη στον 2^ο νόμο του Νεύτωνα και στην θεώρηση του ρευστού ως πολλά σωματίδια που αλληλοεπιδρούν. Μέχρι και τις αρχές του 20^{ου} αιώνα δεν είχε αποδειχθεί η ύπαρξη των μορίων καθιστώντας την θεωρία πολύ πρωτοποριακή για την εποχή της. Ο τρόπος που μελετάται το ρευστό είναι η διακριτοποίηση του σε διακριτούς απειροστούς όγκους που δέχονται επιφανειακές δυνάμεις αδρανειακές δυνάμεις και εξωτερικές δυνάμεις.

Έτσι οι εξισώσεις Navier Stokes για την ασυμπίεστη ροή ρευστού στο καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X_a - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y_a - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
\rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z_a - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\eta \xi_a) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

Η γενική εξίσωση Navier Stokes γράφεται και ως μια ενιαία ως εξής:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f \quad (4.6)$$

∇ Ανάδελτα

ρ πυκνότητα ρευστού

u ταχύτητα ρευστού

p πίεση συμπιεστού ρευστού

μ Δείκτης δυσρευστότητας

f Αδρανειακές δυνάμεις

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = p f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 U_i$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει την δυναμική ισορροπία των μεταβαλλόμενων δυνάμεων, της αδράνειας, των εξωτερικών δυνάμεων, των τάσεων λόγω διαφοράς πίεσης στο ρευστό, των εσωτερικών δυνάμεων τριβής. Για να είναι επιλύσιμο το σύστημα πρέπει να λάβουμε υπόψιν την εξίσωση της συνέχειας (4 εξισώσεις, με 4 άγνωστοι).

- Άγνωστοι (3 συνιστώσες ροής + πίεση)
- Εξισώσεις (3 δυναμικής ισορροπίας+ Εξίσωση συνέχειας)
- Πρέπει να οριστούν Αρχικές και Οριακές συνθήκες

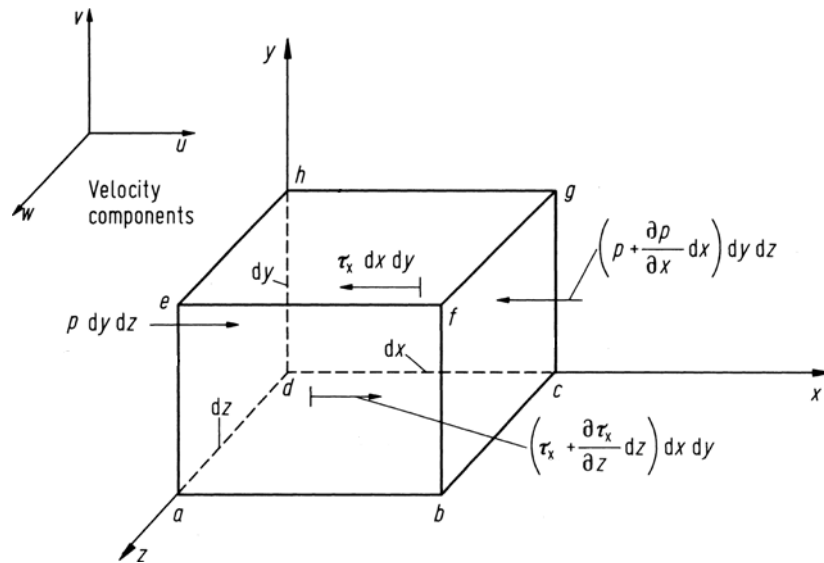
Οι αρχικές συνθήκες ορίζονται οι ποσότητες πίεσης ταχύτητας για $t=0$ και οριακές συνθήκες ορίζονται εκεί που υπάρχει επαφή ρευστού στερεού

Νόμος του Reynolds

Η εξίσωση του Reynolds ορίζει την σχέση πίεσης-θέσης μεταξύ δύο επιφανειών με σχετική ταχύτητα και δύναμή. Είναι μια απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων του Navier-Stokes που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μοντελοποίηση προβλημάτων λίπανσης. Η απλοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes γίνεται κάνοντας κάποιες παραδοχές.

- Η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή
- Η αδράνεια του ρευστού αγνοείται
- Η ροή είναι στρωτή
- Το λιπαντικό συμπεριφέρεται σαν νευτώνειο ρευστό
- Το ιξώδες παραμένει σταθερό σε όλο το φιλμ λίπανσης και η ποσότητα η είναι το μέσο ιξώδες.
- Η πίεση παραμένει σταθερή για συγκεκριμένο σημείο του φιλμ
- Δεν υπάρχουν ολισθήσεις (slip) στα όρια.

Η εξίσωση Reynolds μπορεί τώρα να εξαχθεί λαμβάνοντας υπόψιν την ισορροπία ενός στοιχείου και την συνέχεια ροής.



Εικόνα 4-3: Στοιχειώδης όγκος ρευστού.

Ισορροπία ενός στοιχείου:

Θεωρούμε ένα μικρό στοιχείο ρευστού από ένα φιλμ λίπανσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για απλοποίηση θεωρούμε ότι οι δυνάμεις επάνω στο στοιχείο αρχικά ενεργούνε στον άξονα x μόνο.

Στο παραπάνω στοιχείο απουσιάζουν οι διατρητικές τάσεις τ_{xy} και σ_{xx} αφού το πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες είναι μόνο η ταχύτητα της άνω και κάτω πλάκας ($z=0, z=h$). Από την ισορροπία των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα προκύπτει:

$$p \, dydz + \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz \right) dx dy = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \tau_x dx dy$$

Η οποία γίνεται

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

Θεωρώντας μη μηδενικό όγκο, δηλαδή $dx dy dz \neq 0$ και τα δύο μέρη της εξίσωσης μπορούν να διαιρεθούν με αυτή την ποσότητα και έτσι προκύπτει ότι η συνθήκη ισορροπίας στον άξονα x και στον άξονα y:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Η πίεση στον άξονα z παραμένει σταθερή, ώστε να ισχύει:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Όμως η τάση λόγω διάτμησης στους άξονες μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\tau_x &= \eta \frac{u}{h} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ \tau_y &= \eta \frac{v}{h} = \eta \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}$$

Έτσι από τις παραπάνω προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας για τον άξονα x προκύπτει

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 = \eta u$$

Οι c_1, c_2 είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης που βρίσκονται από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}u &= U_2 \text{ για } z = 0 \\ u &= U_1 \text{ για } z = h\end{aligned}$$

Και έτσι

$$\begin{aligned}C_1 &= (U_1 - U_2) \frac{\eta}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \\ C_2 &= \eta U_2\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές και απλοποιώντας προκύπτουν οι εξισώσεις της ταχύτητας του ρευστού

Στον άξονα x :

$$u = \left(\frac{z^2 - zh}{2\eta} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + (U_1 - U_2) \frac{z}{h} + U_2 \quad (4.7)$$

Με την ίδια διαδικασία και στον άξονα y :

$$v = \left(\frac{z^2 - zh}{2\eta} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + (V_1 - V_2) \frac{z}{h} + V_2 \quad (4.8)$$

Συνέχεια Ροής

Ο κανόνας της συνέχειας ροής υπαγορεύει ότι η ποσότητα της ροής η οποία εισέρχεται στον όγκο θα πρέπει να ισούται με την ποσότητα της ροής η οποία εξέρχεται από τον όγκο. Η ποσότητα της ροής για τους άξονες x, y:

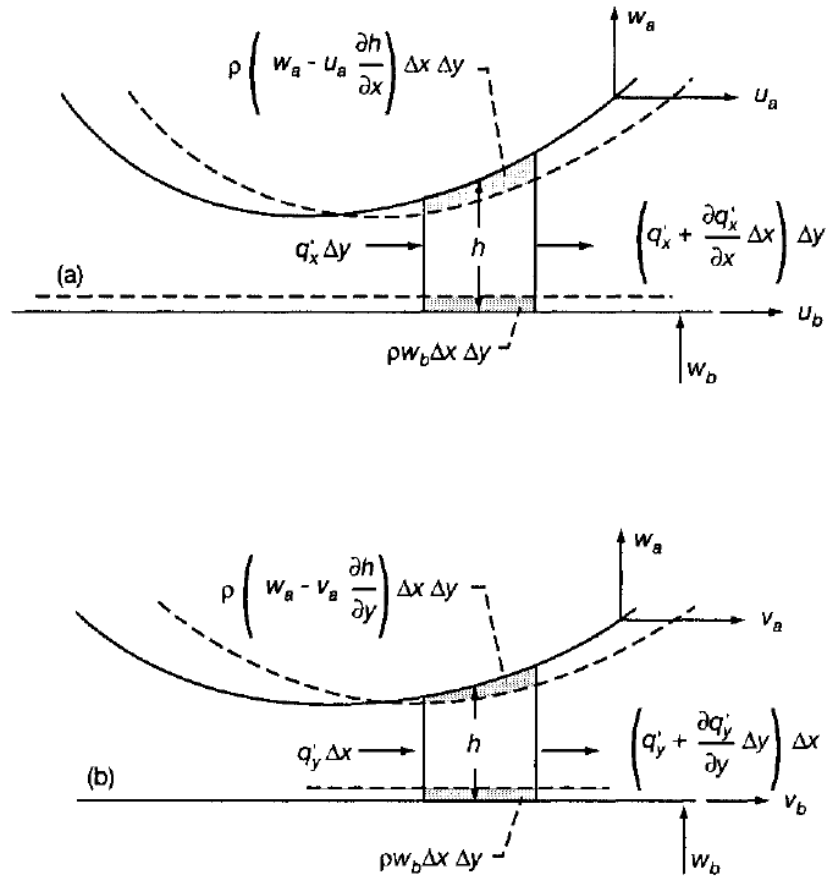
$$\begin{aligned} q'_x &= \int_0^h u dz \\ q'_y &= \int_0^h v dz \end{aligned} \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} q'_x &= -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_a + u_b}{2} h \\ q'_y &= -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_a + v_b}{2} h \end{aligned} \quad (4.10)$$

Για να εφαρμοστεί η εξίσωση της συνέχειας ροής χρησιμοποιείται ένας όγκος που βρίσκεται κατά μήκος του ρευστού (λιπαντικού φιλμ)

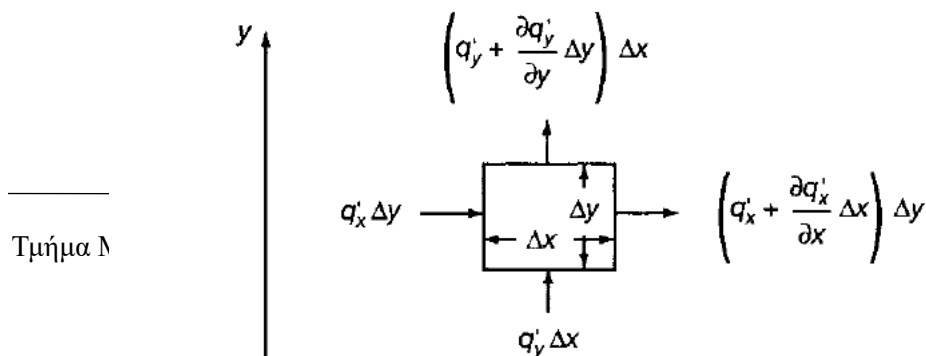
Το τρισδιάστατο στοιχείο λιπαντικού που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει εμβαδό έχει διαστάσεις Δx και Δy στον x και y άξονα ενώ στον z άξονα περιορίζεται μεταξύ μιας πλάκας ($z=0$) και μιας καμπύλης επιφάνειας με αποτέλεσμα το πάχος h να είναι συνάρτηση των x,y.



Η μάζα του στοιχείου $\rho h \Delta x \Delta y$. Ο ρυθμός μεταβολής μέσα στον χώρο ελέγχου προκύπτει από την αλλαγή στον ρυθμό μεταβολής μάζας που εισέρχεται στον χώρο ελέγχου και τον ρυθμό μεταβολής που φεύγει από τον χώρο. Έτσι:

$$\rho q'_x + \rho q'_y = \rho q'_x + \frac{\partial \rho q'_x}{\partial x} \Delta x + \rho q'_y + \frac{\partial \rho q'_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h)$$

Που γίνεται:



Τμήμα Ι

$$-\frac{\partial \rho q'_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho q'_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho h)$$

Και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Από την σχηματική αναπαράσταση:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = \rho \left(w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} - v_a \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Από τις εξισώσεις προκύπτει η τελική μορφή της Reynolds

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h(u_a + u_b)}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h(v_a + v_b)}{2} \right) + \rho(w_a - w_b) - \rho u_a \frac{\partial h}{\partial x} - \rho v_a \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Για το γραμμικό πρόβλημα ελστουδροδυναμικής λίπανσης που καταπιάνεται η εργασία η κίνηση είναι εφαιπτομενική άρα το w_a είναι συνάρτηση της ταχύτητας των επιφανειών και θεωρούμε το $w_b = 0$

$$w_a = u_a \frac{\partial h}{\partial x} + v_a \frac{\partial h}{\partial y}$$

Έτσι η εξίσωση Reynolds γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\tilde{u} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12\tilde{v} \frac{\partial(\rho h)}{\partial y}$$

$$\text{όπου } \tilde{u} = \frac{u_a + u_b}{2} \quad \tilde{v} = \frac{v_a + v_b}{2}$$

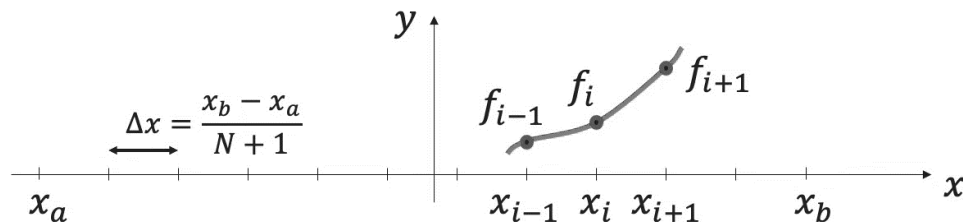
Μία ακόμα απλοποίηση μπορεί να γίνει αγνοώντας τις πλάγιες διαρροές του ρευστού από την επαφή δηλαδή αγνοώντας τελείως την ταχύτητα v του ρευστού. Έτσι η τελική μορφή της εξίσωσης Reynolds με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12\tilde{u} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (4.11)$$

4.3 Θεωρία Πεπερασμένων Διαφορών

Όλα τα φαινόμενα στην φύση μπορούν να εκφραστούν με διαφορικές εξισώσεις. Με την διαλεκτική μελέτη οι μηχανικοί ακολουθώντας τους βασικούς νόμους της μηχανικής και της θερμοδυναμικής όρισαν θεμελιώδης διαφορικές εξισώσεις όπως παράδειγμα τις εξισώσεις Navier-Stokes, εξισώσεις ροής θερμότητας, εξισώσεις ταλαντωτικών φαινομένων. Η επίλυση αυτών των εξισώσεων στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι εφικτή με αναλυτικό τρόπο χρησιμοποιώντας τις μεθόδους επίλυσης των ΣΔΕ (Συνήθης διαφορικές εξισώσεις) ή ΜΔΕ (Μερικές διαφορικές εξισώσεις). Τότε η μόνη λύση μπορεί να είναι η προσέγγιση του φαινομένου με υπολογιστικές μεθόδους. Στα παρακάτω κεφάλαια γίνεται ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της εξίσωσης του Reynolds.

Σειρά Taylor και αριθμητική προσέγγιση παραγώγων



Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[x_a, x_b]$. Διαιρώντας το πεδίο ορισμού σε διακριτά κομμάτια μήκος Δx με πλήθος $N+1$. Ορίζεται f_i ως:

$$f_i = f(x_i)$$

Από την σειρά Taylor προκύπτουν σχέσεις που περιγράφουν τις τιμές της συνάρτησης f στους γειτονικούς κόμβους.

$$f_{i+1} = f(x_i + \Delta x) = f_i + \frac{f'(x_i)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$$f_{i-1} = f(x_i - \Delta x) = f_i - \frac{f'(x_i)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!} \Delta x^2 - O(\Delta x^3)$$

Ο 3^{ος} όρος όπως φαίνεται θεωρείται αμελητέος καθώς το Δx^3 είναι πολύ μικρότερο της μονάδας.

Αφαιρώντας τις δυο εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & \left(f_{i+1} = f_i + \frac{f'(x_i)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \right) \\ & - \left(f_{i-1} = f_i - \frac{f'(x_i)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \right) \end{aligned}$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^3)$$

Και διαιρώντας με Δx :

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.12)$$

Ο όρος που σημαίνεται με κόκκινο είναι το σφάλμα που θεωρείται μικρό.

Η αριθμητική προσέγγιση της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης που φαίνεται παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως συνάρτηση των σημείων $x_{i\pm 0.5}$.

$$\begin{aligned} x_{i\pm 0.5} &= x_i \pm \frac{\Delta x}{2} \\ f'(x_i) &= \frac{f_{i+0.5} - f_{i-0.5}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσεγγιστεί και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor για τα σημεία $x_{i\pm 0.5}$, προσθέτοντας τις εξισώσεις ο όρος της 2^{ης} παραγώγου δεν απαλείφεται.

$$f\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x_i) - \frac{f'(x_i)}{1!} \frac{\Delta x}{2} + \frac{f''(x_i)}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + O(\Delta x^4),$$

$$+ f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!} \frac{\Delta x}{2} + \frac{f''(x_i)}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + O(\Delta x^4)$$

$$f\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2f(x_i) + 2 \frac{f''(x_i)}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + O(\Delta x^4).$$

Λύνοντας ως προς της δεύτερη παράγωγο προκύπτει:

$$f_i'' = \frac{f_{i-0.5} - 2f_i + f_{i+0.5}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} + O(\Delta x^2)$$

(4.14)

4.4 Επίλυση Reynolds με την Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών

Η Συνήθης διαφορική εξίσωση που καλούμαστε να λύσουμε είναι η 4.10:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right) = 12u_s \frac{d(\rho h)}{dx}$$

Η οποία μπορεί αν γραφεί και ως:

$$\frac{d}{dx} \left(\varepsilon \frac{dp}{dx} \right) = \frac{dc}{dx}, \quad x \in [x_a, x_b]$$

Με

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{\rho h^3}{12\mu} \quad \text{και} \quad c = c(x) = \frac{(u_1 + u_2)}{2} \rho h.$$

Για να διακριτοποιήσουμε την Σ.Δ.Ε. θεωρούμε την εξίσωση

$$g(x) := \varepsilon(x) p'(x)$$

Και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση δεύτερης παραγώγου από την προηγούμενη ενότητα:

$$g'(x_i) = (\varepsilon(x_i) p'(x_i))' = \frac{\varepsilon\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) p'\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) - \varepsilon\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right) p'\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right)}{2(\Delta x/2)}$$

Γνωρίζοντας από την σειρά Taylor πως

$$\varepsilon \left(x_i \pm \frac{\Delta x}{2} \right) \approx \frac{\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i}{2}$$

Και

$$p' \left(x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) \approx \frac{p_{i+1} - p_i}{2(\Delta x/2)} + O \quad \& \quad p' \left(x_i - \frac{\Delta x}{2} \right) \approx \frac{p_i - p_{i-1}}{2(\Delta x/2)} + O$$

Προκύπτει η αριστερή διακριτοποιημένη μορφή της Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\varepsilon \frac{dp}{dx} \right) &\approx \frac{\left(\frac{\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i}{2} \right) \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}{2} \right) \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \\ &= \frac{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})p_{i-1} - (\varepsilon_{i+1} + 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})p_i + (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)p_{i+1}}{2\Delta x^2} \end{aligned}$$

Για την δεξιά πλευρά της Σ.Δ.Ε. έχουμε την διακριτοποίηση της:

$$\frac{dc}{dx}(x_i) \approx \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta x} = \frac{\rho_i h_i - \rho_{i-1} h_{i-1}}{\Delta x}$$

Σε αδιάστατη και διακριτοποιημένη μορφή η Reynolds γράφεται ως:

$$\frac{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})P_{i-1} - (\varepsilon_{i+1} + 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})P_i + (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)P_{i+1}}{\Delta X^2} = \frac{\rho_i^* H_i - \rho_{i-1}^* H_{i-1}}{\Delta X} \quad (4.15)$$

$$\Delta X = X_i - X_{i-1}.$$

Γνωρίζοντας τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος καταλήγουμε σε λύση.

4.5 Εξίσωση Ισορροπίας Δύναμης

Επειδή κάθε Ελστοϋδροδυναμικό πρόβλημα λύνεται υπό την επίδραση συγκεκριμένου σταθερού φορτίου η πίεση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων δηλαδή το φορτίο να ισούται με την πίεση επί την

επιφάνεια ή στην περίπτωση του γραμμικού προβλήματος με την πίεση επί την την γραμμή εφαρμογής της.

$$w - \int_{x_0}^{x_e} p(s) ds = 0 \quad (4.16)$$

Το κριτήριο αυτό είναι σημαντικό για την σύγκλιση του υπολογιστικού μοντέλου.

5. Επίλυση του Προβλήματος Γραμμικής Ισοθερμικής ΕΥΔ Λίπανσης

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφέρθηκαν αναλυτικά τα χαρακτηριστικά και οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ΕΥΔ λίπανσης καθώς και τις εξισώσεις που τα περιγράφουν. Επιπλέον αναλύθηκε η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών ως μέθοδος επίλυσης του ρευστοδυναμικού προβλήματος της λίπανσης μη σύμμορφων επιφανειών. Στο παρόν κεφάλαιο θα επιλυθεί το πρόβλημα της γραμμικής ισοθερμικής ΕΥΔ χωρίς την επίδραση της τραχύτητας δηλαδή λείων μη σύμμορφων επιφανειών.

5.1 Βασικές Εξισώσεις

Επειδή η ελαστική παραμόρφωση της επιφάνειας το ιξώδες και η πυκνότητα του λιπαντικού επηρεάζονται από την πίεση και η πίεση με την σειρά της επηρεάζεται από αυτές τις ποσότητες, για να βρούμε την τελική Steady-State κατανομή πίεσης και το προφίλ του λιπαντικού φιλμ ξεκινάμε υπολογίζοντας το αρχικό πάχος και το ιξώδες από την θεωρητική κατανομή πίεσης από την θεωρία Hertz. Το αρχικό πάχος του φιλμ και το ιξώδες αντικαθίσταται στην εξίσωση Reynolds. Από την νέα κατανομή πίεσης προκύπτει το νέο προφίλ του φιλμ και το νέο ιξώδες. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία μέχρι να συγκλίνει η πίεση σε μια συγκεκριμένη τιμή με απόκλιση ενός επιτρεπτού σφάλματος προκύπτει η επίλυση.

Οι βασικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και έχουν αναφερθεί τα προηγούμενα κεφάλαια αρχικά θα πρέπει να αδιαστατοποιηθούν και έπειτα να διακριτοποιηθούν:

Η Εξίσωση Reynolds γίνεται:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right) = 12u_s \frac{d(\rho h)}{dx}$$

$$\frac{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})P_{i-1} - (\varepsilon_{i+1} + 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})P_i + (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)P_{i+1}}{\Delta X^2} = \frac{\rho_i^* H_i - \rho_{i-1}^* H_{i-1}}{\Delta X}$$

$$\Delta X = X_i - X_{i-1}.$$

Η Εξίσωση ελαστικής παραμόρφωσης γίνεται:

$$v(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_{x_0}^{x_e} p(s) \ln (s-x)^2 ds + c$$

$$V_i = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n [K_{ij}] P_j$$

$$K_{ij} = (|i-j| + 0.5) [\ln (|i-j| + 0.5) - 1] - (|i-j| - 0.5) (\ln ||i-j| - 0.5| - 1), \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Η Εξίσωση λιπαντικού φιλμ γίνεται:

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R} + v(x)$$

$$H_i = H_0 + \frac{X_i^2}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n K_{ij} P_j$$

Η Εξίσωση πιεζο-ιζώδους (Roelands) γίνεται:

$$\eta^* = \exp \left\{ [\ln (\eta_0) + 9.67] \left[-1 + \left(1 + \frac{p_H P}{p_0} \right)^z \right] \right\}$$

Η Εξίσωση πυκνότητας-πίεσης γίνεται:

$$\rho^* = 1 + \frac{0.6p}{1 + 1.7p}$$

Η Εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων γίνεται:

$$w - \int_{x_0}^{x_e} p(x) dx = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^n P_i \Delta X_i = 0$$

5.2 Αριθμητική μέθοδος υπολογισμού του προβλήματος σε προγραμματιστικό περιβάλλον

5.2.1 Επαναληπτική Μέθοδος για την κατανομή πίεσης.

Χρησιμοποιούμε την διακριτοποιημένη και αδιαστασιοποιημένη Reynolds (εξίσωση 4.14). Γνωρίζοντας πως η αδιάστατη παράγοντας του φιλμ είναι συνάρτηση της πίεσης από την εξίσωση και χρησιμοποιώντας την θεωρία ελαστικότητας και λύνοντας ως προς P_i καταλήγουμε στην τελική σχέση για την πίεση στον κόμβο i η οποία αποτελεί συνάρτηση του δοθέντος πάχους του φιλμ και ιξώδους της δοθείσας πίεσης και πυκνότητες ποσότητες που προέκυψαν από τις προηγούμενες επαναληπτικές διαδικασίες.

$$P_i = \frac{\varepsilon_{i-1/2}P_{i-1} + \varepsilon_{i+1/2}P_{i+1} - \Delta X \left[\rho_i^* H_i - \rho_{i-1}^* H_{i-1} + \left(\rho_i^* a_0 \frac{1}{\pi} - \rho_{i-1}^* a_1 \frac{1}{\pi} \right) P_i \right]}{\varepsilon_{i-1/2} + \varepsilon_{i+1/2} + \left(\rho_{i-1}^* a_1 \frac{1}{\pi} - \rho_i^* a_0 \frac{1}{\pi} \right) \Delta X} \quad (5.1)$$

5.2.2 Αριθμητική μέθοδος για την ισορροπία των δυνάμεων

Για να μπορέσει να ικανοποιηθεί η σχέση του προηγούμενου κεφαλαίου θα πρέπει το πάχος του λιπαντικού να αλλάξει έτσι ώστε να αλλάξει η πίεση και να συνάδει με το δοθέν βάρος. Όταν υπολογίζεται η κατανομή πίεσης από την εξίσωση Reynolds και η διαφορά των πιέσεων δυο διαδοχικών επαναλήψεων είναι ικανοποιητικά μικρό, δηλαδή έχουμε σύγκλιση, πρέπει να ελέγχουμε και το κριτήριο ισορροπίας δυνάμεων. Για το μονοδιάστατο πρόβλημα:

$$\left| \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^n P_i \Delta X_i \right| \leq \varepsilon_w$$

Όπου το ε_w είναι η ανοχή για την ισορροπία των δυνάμεων.

Για τον έλεγχο καταγράφεται η διαφορά:

$$\Delta W = \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^n P_i \Delta X_i$$

Έπειτα αλλάζουμε το πάχος και συγκεκριμένα το ελάχιστο πάχος του λιπαντικού h_0 από την παρακάτω σχέση:

$$H(X) = H_0 + \frac{X^2}{2} + v(X)$$

Αν το $\Delta W > 0$ το άθροισμα των πιέσεων είναι μικρότερο από το δοθέν φορτίο άρα θα πρέπει να μικρύνουμε το H_0 . Αντίθετα αν το $\Delta W < 0$ το άθροισμα των πιέσεων είναι μικρότερο από το δοθέν φορτίο άρα θα πρέπει να αυξήσουμε το H_0 . Για να μην επηρεάσει αρνητικά η διόρθωση του H_0 στην σύγκλιση της πίεσης θα πρέπει να γίνεται με πολύ μικρά βήματα ΔH_0 .

Για την διόρθωση του ελάχιστου πάχους και κατά συνέπεια για να ικανοποιηθεί το κριτήριο ακολουθούμε την παρακάτω αλγοριθμική διαδικασία:

1. Χρησιμοποιούμε τις εμπειρικές σχέσεις της ενότητας 3.5 και συγκεκριμένο για το πιεζο-ιξώδες πρόβλημα μας διαλέγουμε την παρακάτω σχέση για το αρχικό ελάχιστο πάχος $H_{\min}$:

$$H_{\min} = 1.6 \left(\frac{R}{b} \right) G^{*0.6} U^{*0.7} W^{*-0.13}$$

2. Βρίσκουμε το ελάχιστο πάχος H_0 :

$$\min \left\{ H_0 + \frac{X_i^2}{2} + v_i \right\} = H_{\min}$$

3. Επιλέγουμε

$$\Delta H_0 = (0.01 \sim 0.005) H_{\min}$$

4. Για την διόρθωση του H_0 :

$$H_0 = H_0 \pm \Delta H_0$$

Όπου χρησιμοποιούμε «+» αν $\Delta W < 0$ και «-» αν $\Delta W > 0$

5.2.3 Δομή κώδικα

Μπορούμε να χωρίσουμε τον κώδικα σε υποπρογράμματα για την καλύτερη κατανόηση.

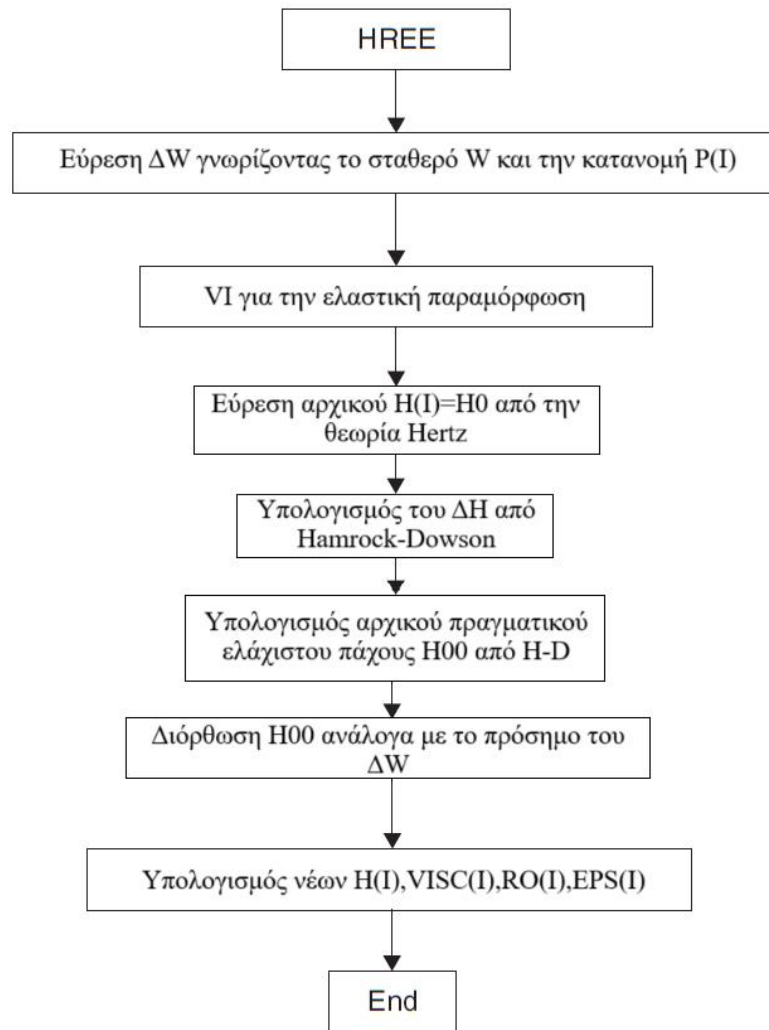
ELAK: Υποπρόγραμμα για την εύρεση των συντελεστών ελαστικής παραμόρφωσης.

V_I: Υποπρόγραμμα για την εύρεση της ελαστικής παραμόρφωσης με χρήση των συντελεστών ελ. Παραμόρφωσης που υπολογίζονται από ELAK.

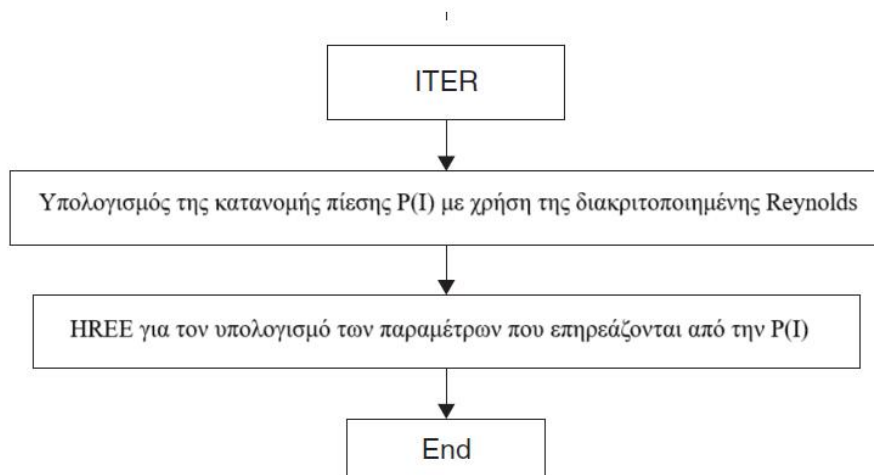
HREE: Υποπρόγραμμα που υπολογίζει το $H(I)$, $RO(I)$, $EDA(I)$ και καλεί την υπορουτίνα VI για τον υπολογισμό της ελαστικής παραμόρφωσης. Το σχηματικό διάγραμμα της διαδικασίας HREE φαίνεται στο σχήμα.

ITER: Υποπρόγραμμα που υπολογίζει την πίεση με την Reynolds επαναληπτικά καλώντας την HREE. Το σχηματικό διάγραμμα της διαδικασίας HREE φαίνεται στο σχήμα.

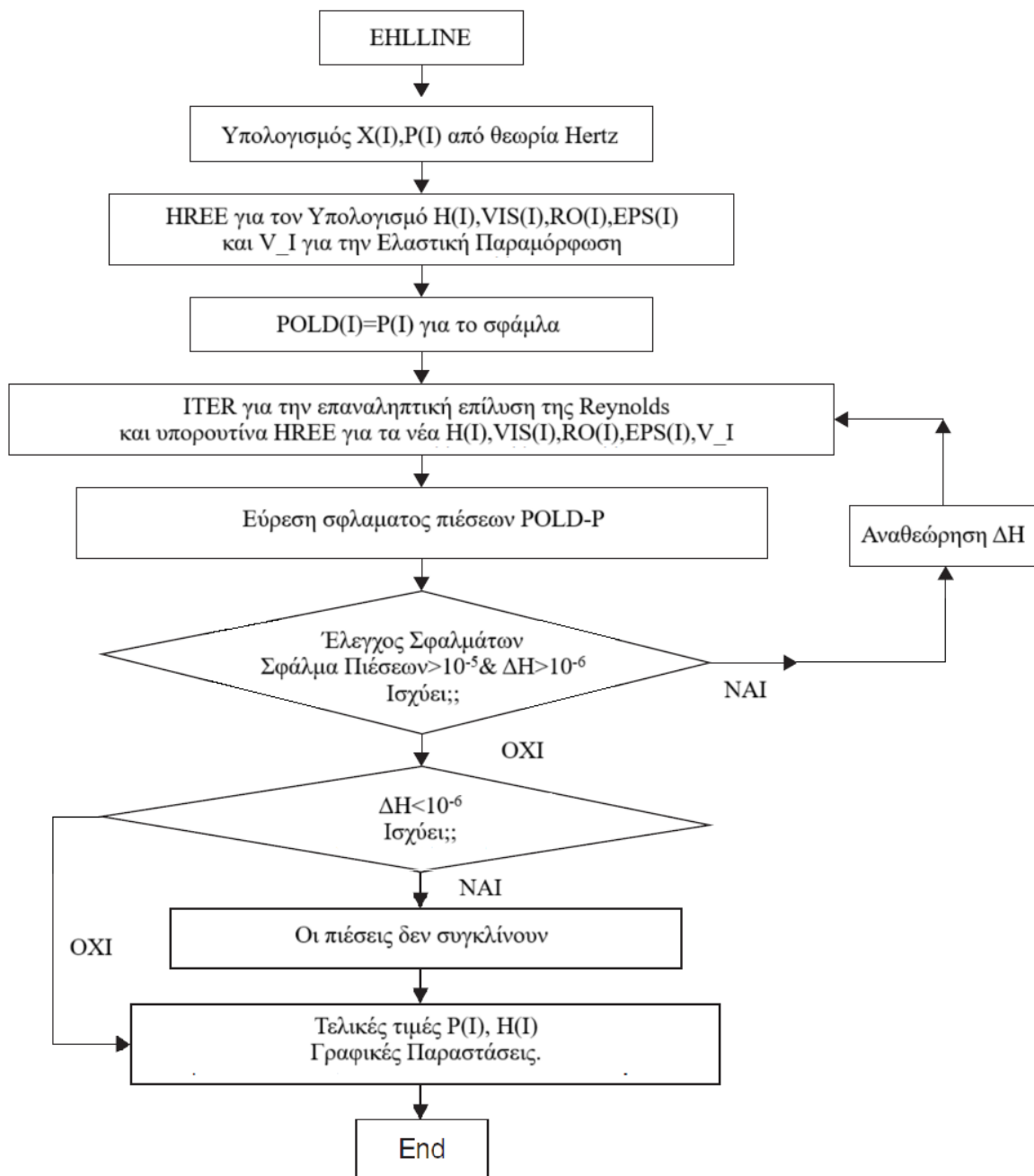
EHLLINE: Κύριο μέρος του κώδικα στον οποίο καλούνται όλες οι παραπάνω υπορουτίνες και στον οποίο γίνεται και ο έλεγχος σύγκλισης και τελικά η εμφάνιση της λύσης και των αποτελεσμάτων. Το σχηματικό διάγραμμα του προγράμματος EHLLINE για την επίλυση του προβλήματος γραμμικής ΕΥΔ λίπανσης φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 5-1: Υποπρόγραμμα HREE



Εικόνα 5-2: Υποπρόγραμμα ITER



Εικόνα 5-3: Πρόγραμμα EHLLINE

Αρχικές Παράμετροι και Συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες που τίθενται στον κώδικα και ορίζουν το πρόβλημα το οποίο επιλύουμε είναι οι εξής:

Παράμετροι	Τιμή	Μονάδα μέτρησης
Πλήθος Κόμβων	1000	-
Θέση Εισόδου Λιπαντικού	-2.5	-
Θέση Εισόδου Λιπαντικού	2	-
Φορτίο	50000	N
Αρχικό Ιξώδες	0.2	$Pa \cdot s$
Ισοδύναμη Ακτίνα κυλίνδρου	0.001	m
Ταχύτητα Εισαγωγής λιπαντικού	2.2	m/s
Μέτρο ελαστικότητας	210	GPa
Λόγος του Poisson	0.30	-
Πυκνότητα	7850	kg/m^3

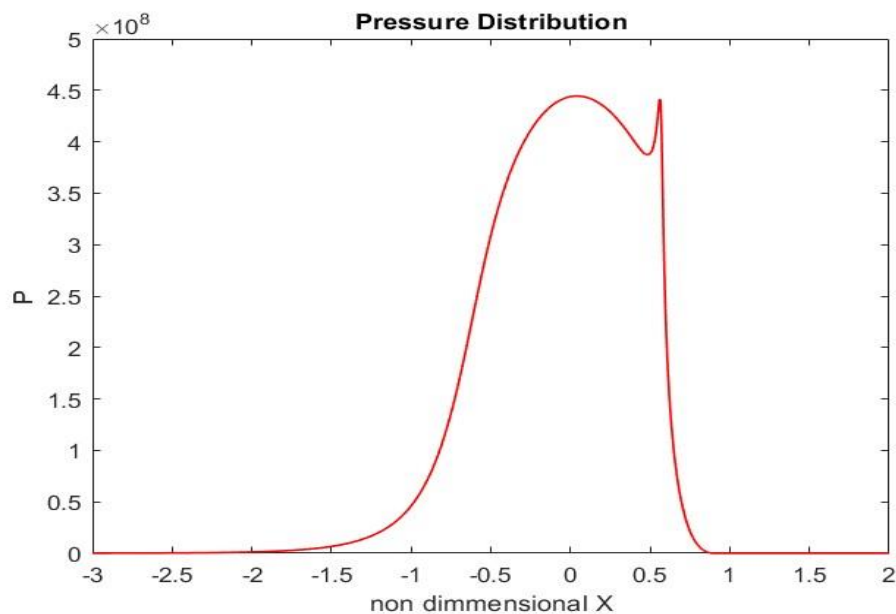
Επιπλέον για την επίλυση της Reynolds ορίζουμε ως συνοριακές συνθήκες την ατμοσφαιρική πίεση 1 atm που είναι τάξεις μεγέθους μικρότερη από την πίεση Hertz γι' αυτό ορίζεται μηδενική.

Το πρόγραμμα γράφτηκε με την γλώσσα Matlab

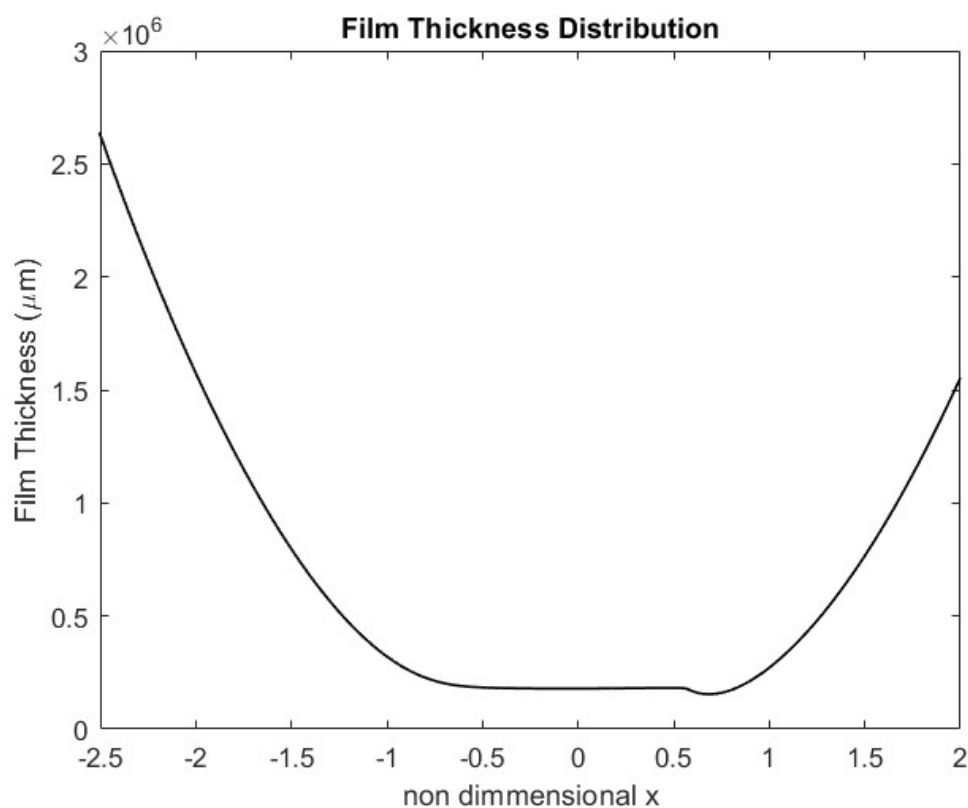
6. Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

6.1 Αποτελέσματα

Παρακάτω φαίνονται τα γραφήματα της πίεσης και του πάχους του λιπαντικού.

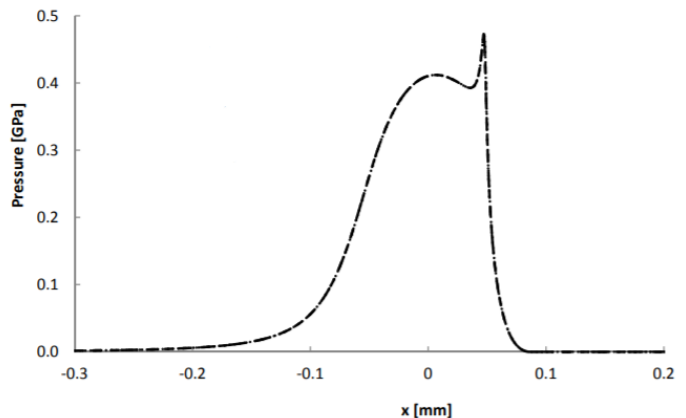
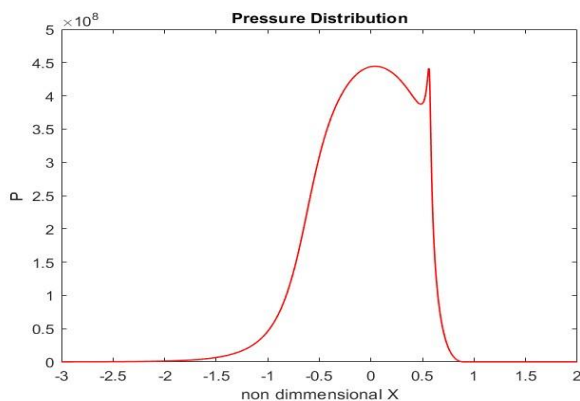


Εικόνα 6-1: Κατανομή Πίεσης ΕΥΔ



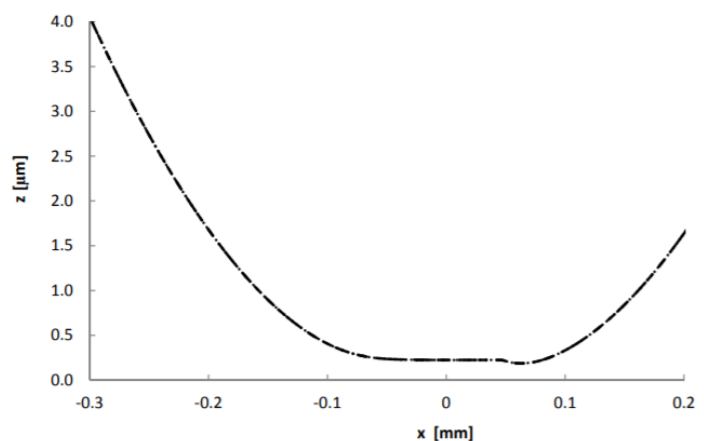
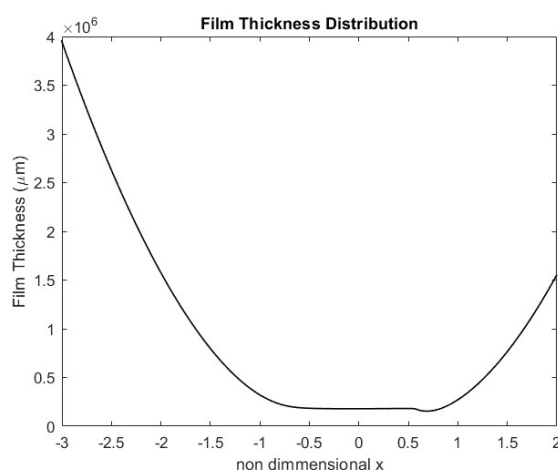
Εικόνα 6-2: Προφίλ λιπαντικού φιλμ

Για να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα-γραφήματα θα τα συγκρίνουμε με την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Θα επιλέξουμε την εργασία του Srirattayawong, 2012 η οποία χρησιμοποιεί την υπολογιστική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, μια πολύ πιο ακριβή μέθοδο η οποία έχει και μεγάλο υπολογιστικό κόστος.



Εικόνα 6-3: Σύγκριση κατανομής πίεσης

Η γεωμετρία της κατανομής αν και σωστή διαφέρει αισθητά από αυτή της επιλεγμένης εργασίας κυρίως στην περιοχή της κορυφής πίεσης στην στένωση όπου η εργασία του Srirattayawong δείχνει μεγαλύτερη αύξηση πίεσης. Παρόλα αυτά η μέγιστη πίεση της κατανομής και η πίεση της κορυφής δεν απέχουν πολύ από αυτές τις εργασίες. Συγκεκριμένα η πίεση στην θέση 0 έχει αποκλιση περίπου 0.02 GPa ($\approx 4\%$) και στην στένωση 0.04 GPa ($\approx 7\%$).



Εικόνα 6-4: Σύγκριση προφίλ λιπαντικού φιλμ

Οι αποκλίσεις στο προφίλ του φιλμ είναι πού μικρές. Συγκεκριμένα για το ελάχιστο πάχος η απόκλιση είναι $0.012\mu\text{m}$

6.2 Συμπεράσματα και σχόλια

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποτελούν τυπικά παραδείγματα κατανομής πίεσης και προφίλ του λιπαντικού υπό καθεστώς ΕΥΔ λίπανσης επαφής κυλίνδρου πλάκας. Η καμπύλη πίεσης ακολουθεί την πίεση Hertz και η χαρακτηριστική κορυφή-αύξηση πίεσης πριν την στένωση φαίνεται καθαρά. Οι αποκλίσεις οφείλονται κυρίως στην διαφορά των υπολογιστικών μεθόδων αλλά και στο γεγονός ότι η εργασία του (2) λαμβάνει υπόψιν της το φαινόμενο της σπηλαίωσης. Συμπερασματικά αποκλίσεις των δύο εργασιών φαίνεται να είναι μικρές ενώ το υπολογιστικό κόστος της παρούσας εργασίας είναι σαφώς μικρότερο λόγω της απλότητας της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών έναντι των πεπερασμένων στοιχείων. Η εργασία Srirattayawong βέβαια συνεχίζει προσπαθώντας να εισάγει στο πρόγραμμα την τραχύτητα και την θερμοκρασία κάνοντας το πρόβλημα πολύ πιο απαιτητικό.

Βιβλιογραφία

1. **Π., Ψυλλάκη και Νικολακόπουλος, Π.** *Μηχανική Επιφανειών και Εφαρμογές - Τριβολογία, Στοιχεία Μηχανών και επιφανειακές κατεργασίες*. s.l. : Τζιόλα, 2021.
2. **Srirattayawong, Sutthinan.** *CFD Study of Surface Roughness Effects on the Thermo-Elastohydrodynamic Lubrication Line Contact Problem*. Leicester : s.n., 2014.
3. **H.H. Masjuki *, S.S.N. Azman, N.W.M. Zulkifli, A.Z. Syahir.** *Tribology: It's economic and environmental significance* . Faculty of Engineering, University of Malaya, 50603 Kuala Lumpur. : Centre for Energy Sciences.
5. **Hamrock, B.J. and Dowson, D.** *Ball bearing lubrication*. New York : s.n., 1981.
6. **Stachowiak, G.W,A.W. Batchelor.** *Engineering Tribology*. 1993.
7. **Mang, T. and Dresel, W.** *Lubricants and Lubrication*. 2017.
8. **Dowson, D. and Higginson, G.R.** *Elasto-hydrodynamic lubrication: the fundamentals of roller and gear lubrication*. 1966.
9. **Hamrock, B.J. and Dowson, D.** *Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: part III—fully flooded results*. 1976.
10. **Hamrock, B.J.** *Fundamentals of fluid film lubrication*. s.l. : NASA, 1994.
11. **Lubrecht, A.A.** *Multigrid techniques for the computation of isothermal elastohydrodynamically lubricated point*. 1986.
12. **Huang, Ping.** *Numerical Calculations of lubrication, Methods and Programms*. Guangzhou, China : s.n., 2013.