



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη ροής αέρα γύρω από αεροτομή χρησιμοποιώντας το openFoam

ΣΩΤΗΡΙΟΣ ΠΑΝΑΓΟΣ

1079596

ΠΟΛΥΚΑΡΠΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ,ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ/2024

Πανεπιστήμιο Πατρών, ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ
ΣΩΤΗΡΙΟΣ ΠΑΝΑΓΟΣ
© 2024 – Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας δεν υποδηλοί την αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

Κατά τη συγγραφή τηρήθηκαν οι αρχές της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών – Αεροναυπηγών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ**Ροή αέρα γύρω από αεροτομή χρησιμοποιώντας openFoam****Σωτήριος Πανάγος**

Το αντικείμενο του αεροναυπηγού μηχανικού είναι πολυσχιδές και κάποιος φοιτητής που λαμβάνει μέρος σε ένα τέτοιο πρόγραμμα σπουδών μπορεί να καταπιαστεί με διάφορα αντικείμενα (δομική ανάλυση, υπολογιστική ρευστομηχανική, συστήματα αυτομάτου ελέγχου). Στη παρούσα σπουδαστική εργασία επιλέχθηκε το αντικείμενο της υπολογιστικής αεροδυναμικής και συγκεκριμένα η μελέτη της ροής αέρα γύρω από αεροτομή NACA0015 στις δύο διαστάσεις(2D). Για να επιτευχθεί ο σκοπός χρησιμοποιήθηκε το OpenFOAM σαν το πλέον κατάλληλο εργαλείο για την υπολογιστική αεροδυναμική και το openVSP για τη δημιουργία της γεωμετρίας του μοντέλου μου .Ειδικότερα η ανάλυση μελετάει επιτυχώς τους αεροδυναμικούς συντελεστές (C_L, C_D) για ροή στις δύο διαστάσεις και τους συγκρίνει με την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Σημαντικό να τονιστεί ότι θεωρείται τυρβώδης ροή και χρησιμοποιούνται δύο μοντέλα τύρβης καθώς και δύο τρόποι δόμησης πλέγματος (blockMesh,snappyHexMesh).

Λέξεις κλειδιά

[2D ,Naca0015,openFoam,openVsp]

ABSTRACT**Flow around an airfoil using openFoam****Sotirios Panagos**

The field of aerospace engineering is multifaceted, and a student participating in such a program can engage with various subjects (structural analysis, computational fluid dynamics, automatic control systems). In the present student thesis, the focus was chosen to be computational aerodynamics, specifically the study of air flow around a NACA0015 airfoil in two dimensions (2D). To achieve this goal, OpenFOAM was used as the most suitable tool for computational aerodynamics and openVSP for creating the geometry of the model. Specifically, the analysis successfully studies the aerodynamic coefficients (C_L , C_D) for two-dimensional flow and compares them with existing literature. It is important to emphasize that turbulent flow is considered, and two turbulence models are used, as well as two methods of mesh generation (blockMesh, snappyHexMesh).

Key words

2D ,Naca0015,openFoam,openVsp

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

πίνακας 1 φυσικά μεγέθη μελέτης	24
πίνακας 2 Δεδομένα και CFD για 14300 κελιά	26
πίνακας 3 Δεδομένα για τις συγκεκριμένες γωνίες επίθεσης	28
πίνακας 4 Για 92470 κελιά με χρήση SnappyHexMesh και 12000 background Mesh	29
πίνακας 5: Μελέτης ανεξαρτησίας πλέγματος	38
πίνακας 6 : Αεροδυναμικοί συντελεστές για 123000 κελιά	39

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 Οπτικοποίηση οριακών στρωμάτων NASA. (n.d.). <i>Boundary Layer</i> . NASA Glenn Research Center. Ανακτήθηκε από NASA.	16
Εικόνα 2 Οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας Fitzpatrick, R. (n.d.). <i>The Boundary Layer</i> . The University of Texas at Austin. Ανακτήθηκε από The University of Texas at Austin.	18
Εικόνα 3 Τα 18 σημεία του blockMesh.....	23
Εικόνα 4 Τα 4 block της γεωμετρίας.....	23
Εικόνα 5 Οι γεωμετρικές αποστάσεις από την είσοδο και την έξοδο για την αεροτομή	24
εικόνα 6:Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή -zoom.....	26
εικόνα 7: Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή -zoom out.....	27
Εικόνα 8 : Ταίριασμα γεωμετρίας.....	28
εικόνα 9 : Πλέγμα με τη χρήση του SnappyHexmesh-zoom out.....	30
εικόνα 10 : Πλέγμα με τη χρήση του SnappyHexMesh-zoom in	30
Εικόνα 11: Ισοβαρείς καμπύλες για k- ω SST -blockMeshDict.....	32
Εικόνα 12 : Ισοταχείς καμπύλες για k- ω SST -blockMeshDict	32
Εικόνα 13 ροϊκές γραμμές k- ω SST -blockMeshDict	33
Εικόνα 14: Ισοταχείς καμπύλες για Spalart Allmaras-blockMeshDict	33
Εικόνα 15: Ισοβαρείς καμπύλες για Spalart Allmaras -blockMeshDict.....	34
Εικόνα 16: Ροϊκές γραμμές ταχύτητας σε συνδυασμό με την αναπαράστασης πίεσης.....	34
Εικόνα 17: Ισοταχείς καμπύλες Spalart Allmaras για SnappyHexMesh.....	35
Εικόνα 18: Ισοβαρείς καμπύλες Spalart Allmaras για SnappyHexMesh	35
Εικόνα 19 : Ισοβαρείς καμπύλες k- ω SST για SnappyHexMesh	36
Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών – Αεροναυπηγών	xii

Εικόνα 20: Ισοταχείς καμπύλες k- ω SST για SnappyHexMesh.....	36
Εικόνα 21: Ροϊκές γραμμές για k- ω SST- SnappyHexMesh	37
Εικόνα 22: Αρχική πύκνωση στα 20640.....	38
Εικόνα 23: Τελική πύκνωση στα 29808 κελιά	39
εικόνα 24: Πύκνωση στα 123000 κελιά	40

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

ρ (πυκνότητα)	Kg/m^3
p (πίεση)	N/m^2
U (ταχύτητα)	m/s^2
μ (δυναμικό ιξώδες)	Pa s
F (δύναμη)	N
μ_t (τυρβώδες ιξώδες)	Pa s
ν_k (μοριακό κινητικό ιξώδες)	m^2/s
Re (αριθμός Reynolds)	αδιάστατη
y^+	αδιάστατη
CFL (αριθμός Co)	αδιάστατη
c (χορδή)	m

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	V
ABSTRACT.....	VIII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	X
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	XII
ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ	XV
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	XVII
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	1
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
1.1 ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ & ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER STOKES	4
1.1.1 Αεροδυναμικές αρχές.....	4
1.1.2 Θεωρητική Επισκόπηση των Εξισώσεων Navier-Stokes	5
1.2 CFD & OPENFOAM	7
1.3 ΕΙΔΗ ΡΟΩΝ ΚΑΙ ΤΥΡΒΗ.....	9
1.3.1 Μοντέλα τύρβης.....	11
1.3.2 Μοντέλα τύρβης στην σπουδαστική	12
1.4 ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ Y^+	15
1.5 ΛΥΤΗΣ SIMPLEFOAM.....	19
2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	21
2.1 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....	21
2.1.1 BlockMeshDict	22
2.1.2 SnappyHexMeshDict & OpenVSP	27

2.2	ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ	31
2.3	ΜΕΛΕΤΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....	37
2.4	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΥΡΒΗΣ	40
2.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		43

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε αυτό το σημείο θέλω να ευχαριστήσω προσωπικά τον καθηγητή Παπαδόπουλο Πολύκαρπο για την καθοδήγηση του στην εργασία καθώς και τον δρ. Γεώργιο Βαφάκο. Δεν πρέπει να ξεχαστεί η καθοριστική συνδρομή των γονέων μου με την συνεχή υλικοπνευματική τους στήριξη αλλά και μια ειδική αναφορά στις αδερφές μου και τη γιαγιά μου Σταυρούλα!

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ροή γύρω από αεροτομή

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μια πρωταρχική αναφορά για την ροή γύρω από αεροτομή και τη σημασία της μελέτης της ,κάποιες βασικές αεροναυπηγικές έννοιες αλλά και ένα ιστορικό πλαίσιο ανάπτυξης των αεροτομών.

Ιστορικό πλαίσιο

Η σχεδίαση αεροτομών έχει βαθιές ρίζες στην ιστορία της αεροναυτικής. Από τις πρώτες προσπάθειες του Leonardo da Vinci να κατανοήσει τις αρχές της πτήσης μέχρι τις σύγχρονες τεχνολογίες αεροδιαστημικής, η αεροτομή αποτελεί κρίσιμο στοιχείο για την ανάπτυξη της αεροπορίας. Οι πρώτες αποτελεσματικές αεροτομές σχεδιάστηκαν τον 19ο αιώνα, με σημαντικές εξελίξεις να σημειώνονται κατά τη διάρκεια των δύο παγκοσμίων πολέμων. Η κατανόηση της ροής του αέρα γύρω από τις αεροτομές ήταν καθοριστική για την ανάπτυξη αεροπλάνων με υψηλή απόδοση και ασφάλεια.

Σημασία

Η μελέτη των ροών γύρω από τις αεροτομές είναι εξαιρετικά σημαντική στη σύγχρονη αεροδυναμική. Κατανοώντας πώς ο αέρας ρέει γύρω από μια αεροτομή, οι μηχανικοί μπορούν να σχεδιάσουν πιο αποδοτικά αεροσκάφη, αυτοκίνητα και ανεμογεννήτριες. Στην αεροπορία, η σωστή σχεδίαση των αεροτομών συμβάλλει στη βελτίωση της απόδοσης και της ασφάλειας των αεροσκαφών. Στον τομέα της αυτοκινητοβιομηχανίας, οι αεροτομές βοηθούν στη μείωση της οπισθέλκουσας,

βελτιώνοντας την κατανάλωση καυσίμου. Στην ανανεώσιμη ενέργεια, οι ανεμογεννήτριες με βελτιστοποιημένες αεροτομές μπορούν να παράγουν περισσότερη ενέργεια από τον άνεμο.

Αεροτομή

Ο ορισμός που δίνεται για την αεροτομή από τη NASA είναι :

Μια αεροδυναμική επιφάνεια σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε ο αέρας που ρέει γύρω της να παράγει χρήσιμη κίνηση. Η διατομή της πτέρυγας ενός αεροπλάνου είναι ένα πτερύγιο αεροτομής [1] .

1.1 ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ & ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER STOKES

Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθούν κάποιες θεμελιώδεις αεροδυναμικές αρχές καθώς και σε εκείνες τις εξισώσεις που διέπουν και περιγράφουν την ρευστομηχανική

1.1.1 Αεροδυναμικές αρχές

Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις αεροδυναμικές αρχές οι οποίες θα καταδειχθούν . Η πρώτη είναι η αρχή του **Bernoulli**. Αυτή η αρχή δηλώνει ότι η πίεση ενός ρευστού μειώνεται καθώς η ταχύτητα του αυξάνεται. Εφαρμόζεται στην αεροδυναμική των αεροτομών, όπου η διαφορά ταχύτητας ανάμεσα στον αέρα που ρέει πάνω και κάτω από την αεροτομή δημιουργεί διαφορά πίεσης, η οποία παράγει άντωση. Δεύτερη βασική αρχή είναι το **Φαινόμενο Coanda**. Αυτό περιγράφει την τάση ενός ρευστού να προσκολλάται σε μια καμπύλη επιφάνεια. Στις αεροτομές, αυτό το

φαινόμενο βοηθά τον αέρα να ακολουθεί την καμπύλη της αεροτομής, συμβάλλοντας στη δημιουργία της άντωσης. Τέλος ,σημαντικό να τονιστεί ο **τρίτος Νόμος του Newton**. Σύμφωνα με τον νόμο δράσης-αντίδρασης, κάθε δράση έχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση. Στην περίπτωση της αεροτομής, ο αέρας που εκτρέπεται προς τα κάτω από την αεροτομή δημιουργεί μια αντίθετη δύναμη προς τα πάνω (ανυψωτική δύναμη).

1.1.2 Θεωρητική Επισκόπηση των Εξισώσεων Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes αποτελούν τη θεμελιώδη περιγραφή της κίνησης των ρευστών και διατυπώθηκαν από τους Claude-Louis Navier και George Gabriel Stokes τον 19ο αιώνα. Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές με μερικές παραγώγους και συχνά απαιτούν υπολογιστικές μεθόδους για την επίλυσή τους σε πολύπλοκα ροϊκά πεδία. Για παράδειγμα, στην αεροδυναμική και τη σχεδίαση αεροσκαφών, χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν τις ροές αέρα γύρω από τα φτερά και την άτρακτο .Επίσης ,περιγράφουν πώς οι παράγοντες όπως η ταχύτητα, η πίεση, η θερμοκρασία και η πυκνότητα ενός ρευστού εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου.

Βασικές Εξισώσεις

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για μια αδιαίρετη ροή με σταθερή πυκνότητα και ιξώδες είναι οι εξής:

1. Εξίσωση Ορμής (Momentum Equation):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \vec{F} \quad (1)$$

2. Εξίσωση Συνέχειας (Continuity Equation):

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2)$$

Όπου :

- ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.
- $\vec{U}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού.
- p είναι η πίεση.
- μ είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.
- $\vec{F}$ είναι η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου (π.χ., βαρύτητα).

Οι εξισώσεις Navier-Stokes περιγράφουν την ισορροπία δυνάμεων μέσα σε ένα ρευστό. Η εξίσωση ορμής βασίζεται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ($F = ma$) για τα ρευστά, ενώ η εξίσωση συνέχειας διασφαλίζει τη διατήρηση της μάζας.

Η ανάλυση τους ήταν καθοριστική για να γίνει αντιληπτό στον αναγνώστη πως συνολικά οι εξισώσεις Navier-Stokes έχουν ευρεία **εφαρμογή** σε διάφορους τομείς όπως:

- Αεροδυναμική και σχεδίαση αεροσκαφών.
- Ωκεανογραφία και μελέτη των θαλάσσιων ρευμάτων.
- Μηχανική ρευστών στην ιατρική (π.χ., ροή αίματος στα αγγεία).
- Σχεδίαση και βελτιστοποίηση βιομηχανικών διεργασιών που περιλαμβάνουν ροή ρευστών.

Για την αριθμητική επίλυση αυτών των εξισώσεων, χρησιμοποιούνται μέθοδοι όπως η Αριθμητική Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD - Computational Fluid Dynamics), οι οποίες επιτρέπουν την προσομοίωση και ανάλυση πολύπλοκων ροών,[6],[7],[8] .

1.2 CFD & OPENFOAM

Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να γίνει μια ενδοσκόπηση στην υπολογιστική Ρευστοδυναμική καθώς και στο υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διεξαγωγή της μελέτης.

CFD

Ο στόχος της υπολογιστικής ρευστομηχανική (CFD, Computational Fluid Dynamics) είναι να επιλύσει αριθμητικά, με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο ροής. Αυτή η επίλυση χρησιμεύει ως οδηγός για το σχεδιασμό και τη βελτίωση σε πολλούς τομείς, όπως:

- Αεροδυναμική
- Υδροδυναμική
- Καύση
- Περιβαλλοντικές ροές και ρύπανση

Η υπολογιστική ρευστομηχανική αποτελεί μια αρκετά καλή προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων στη μηχανική των ρευστών, με τις άλλες δύο να είναι το πείραμα και οι αναλυτικές λύσεις. Το πείραμα είναι το πιο αξιόπιστο μέσο μελέτης, αλλά είναι δαπανηρό, απαιτεί σημαντική προετοιμασία και πόρους και δεν επιτρέπει εύκολα τροποποιήσεις. Οι αναλυτικές μέθοδοι δίνουν

γρήγορες εκτιμήσεις, αλλά είναι λιγότερο αξιόπιστες λόγω των σημαντικών παραδοχών που περιλαμβάνουν (π.χ., απλοποιημένη γεωμετρία, μη συνεκτικό ρευστό, ασυμπίεστο ρευστό κτλ.).

Αν και η υπολογιστική ρευστομηχανική δεν μπορεί να αντικαταστήσει πλήρως τις άλλες δύο μεθόδους, αναπτύσσεται ραγδαία και θεωρείται ως μια "εξελιγμένη αεροσήραγγα" λόγω της διαθεσιμότητάς της (εφόσον υπάρχει κατάλληλος υπολογιστής) και της δυνατότητάς της για γρήγορες τροποποιήσεις και δοκιμές. Είναι αξιοσημείωτο ότι επιτρέπει την κατασκευή ή βελτίωση με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, τόσο σε γήινες όσο και σε αεροδυναμικές εφαρμογές, βελτιώνοντας τις επιδόσεις και εξοικονομώντας χρήματα. Για παράδειγμα, μια καλή εκτίμηση των ζητούμενων μεγεθών σε ένα πρόβλημα με τη χρήση CFD, η οποία θα επαληθευτεί στη συνέχεια με πειράματα, μπορεί να εξοικονομήσει σημαντικούς πόρους σε σχέση με τις συνεχείς πειραματικές δοκιμές, διασφαλίζοντας ότι οι σχεδιαστές κινούνται εντός των εκάστοτε προδιαγραφών.

Επιπλέον, τα σύγχρονα πακέτα λογισμικού CFD επιτρέπουν τη στενή συνεργασία με τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, που χρησιμοποιούνται από τις κατασκευαστικές εταιρείες για τον καθορισμό των φορτίων που ασκούνται στα υλικά, τις δομικές απαιτήσεις των πτερύγων, των ατράκτων κτλ. Αυτό καθιστά τη μέθοδο ακόμα πιο ευέλικτη [3].

OpenFOAM

Το OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) είναι ένα ισχυρό λογισμικό ανοιχτού κώδικα για την αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής ρευστών (CFD). Χρησιμοποιείται ευρέως σε ακαδημαϊκούς και βιομηχανικούς τομείς για την ανάλυση και την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τη ροή ρευστών, τη μεταφορά θερμότητας και τη χημική αντίδραση.

Το OpenFOAM προσφέρει ένα ευρύ φάσμα εργαλείων και δυνατοτήτων που επιτρέπουν την ευέλικτη προσομοίωση πολύπλοκων φυσικών φαινομένων. Η ευελιξία και η επεκτασιμότητα του λογισμικού παρέχουν ένα πλούσιο περιβάλλον προγραμματισμού που επιτρέπει την προσαρμογή και την επέκταση των μοντέλων και των αλγορίθμων σύμφωνα με τις ανάγκες του χρήστη. Υποστηρίζει την προσομοίωση τόσο σταθερών όσο και δυναμικών ροών, πολυφασικών ροών, αεροδυναμικών ροών και πολλών άλλων τύπων. Είναι σχεδιασμένο για παράλληλη επεξεργασία, εκμεταλλευόμενο τους πολλούς πυρήνες των σύγχρονων υπολογιστών για ταχύτερους υπολογισμούς. Επιπλέον, προσφέρει υψηλή ακρίβεια στις αριθμητικές λύσεις μέσω προηγμένων μεθόδων υπολογιστικής πλέγματος και προσεγγίσεων διακριτοποίησης.

Το λογισμικό χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς όπως η αυτοκινητοβιομηχανία για την προσομοίωση της αεροδυναμικής και της ψύξης κινητήρων, στην αεροδιαστημική για το σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών πτερυγίων, στην ενεργειακή μηχανική για τη μελέτη ροής σε αγωγούς και θερμικούς εναλλάκτες, και στην περιβαλλοντική μηχανική για την προσομοίωση ρύπανσης και διασποράς σε ατμόσφαιρα και νερά [26].

1.3 ΕΙΔΗ ΡΟΩΝ ΚΑΙ ΤΥΡΒΗ

Οι ροές που συναντάμε σε μια προσομοίωση μπορούν να διακριθούν σε τρεις κύριες κατηγορίες: στρωτή (laminar), μεταβατική(transient) και τυρβώδης(turbulent).

1. **Στρωτή ροή:** Σε αυτήν την κατηγορία, το ρευστό ρέει με ομαλές και παράλληλες στρώσεις, χωρίς αναταράξεις. Τα μόρια του ρευστού κινούνται σε ευθεία γραμμή και η

ροή είναι σταθερή και προβλέψιμη. Αυτός ο τύπος ροής συνήθως εμφανίζεται σε χαμηλές ταχύτητες και μικρές κλίμακες.

2. **Μεταβατική ροή** : Αυτή η ροή είναι μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της στρωτής και της τυρβώδους. Σε μεταβατική ροή, οι συνθήκες του ρευστού μεταβάλλονται με το χρόνο και μπορεί να παρατηρηθούν μεταβατικές καταστάσεις. Αυτές οι μεταβολές μπορούν να οδηγήσουν σε ασταθή ροή που ενδέχεται να εξελιχθεί είτε σε σταθερή στρωτή είτε σε τυρβώδη.
3. **Τυρβώδης ροή** : Σε αυτήν την κατηγορία, η ροή χαρακτηρίζεται από χαοτική κίνηση και αναταράξεις. Τα μόρια του ρευστού κινούνται σε τυχαίες κατευθύνσεις, προκαλώντας έντονη ανάμειξη και διασπορά ενέργειας. Αυτός ο τύπος ροής συνήθως συμβαίνει σε υψηλές ταχύτητες και μεγαλύτερες κλίμακες, και είναι πιο περίπλοκος στην προσομοίωση και ανάλυση.

Καθεμία από αυτές τις ροές απαιτεί διαφορετικές μεθόδους και προσεγγίσεις για την προσομοίωση, ανάλογα με τις φυσικές ιδιότητες του ρευστού και τις συνθήκες της ροής.

Η τύρβη είναι ένα πολύπλοκο φυσικό φαινόμενο που παρατηρείται σε ρευστά, όπου η ροή γίνεται χαοτική και ασταθής. Το φαινόμενο αυτό έχει μεγάλη σημασία στη μηχανική ρευστών, τη φυσική και τη μηχανική γενικότερα, καθώς επηρεάζει σημαντικά τις διαδικασίες μεταφοράς ορμής, θερμότητας και μάζας.

Η τύρβη χαρακτηρίζεται από την άτακτη και απρόβλεπτη κίνηση των σωματιδίων ενός ρευστού, η οποία προκαλείται από την ύπαρξη δινών και ελικοειδών ροών. Αυτή η κίνηση διαφέρει από τη στρωτή ροή, όπου τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σε ομαλές, παράλληλες Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών – Αεροναυπηγών

στρώσεις. Η κίνηση των σωματιδίων είναι άτακτη και απρόβλεπτη, με έντονες διακυμάνσεις στην ταχύτητα και την πίεση του ρευστού, και δημιουργία και διάλυση δινών σε διάφορες κλίμακες.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι τα θεμελιώδη μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την κίνηση των ρευστών και, συνεπώς, της τύρβης. Ωστόσο, η επίλυση αυτών των εξισώσεων για τυρβώδεις ροές είναι εξαιρετικά δύσκολη λόγω της μη γραμμικότητάς τους. Ο αριθμός Reynolds είναι ένας αδιάστατος αριθμός που χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή. Υψηλές τιμές του αριθμού Reynolds συνδέονται με τυρβώδη ροή.

Οι εφαρμογές της τύρβης είναι ποικίλες και σημαντικές. Στην αεροδυναμική, μελετάται η τύρβη γύρω από τα αεροπλάνα για βελτιστοποίηση του σχεδιασμού. Στην υδροδυναμική, αναλύεται η ροή των ποταμών και των θαλάσσιων ρευμάτων. Στη μηχανολογία, βελτιώνονται οι καυστήρες και οι αντιδραστήρες μέσω της κατανόησης της τυρβώδους ροής [24],[25].

1.3.1 Μοντέλα τύρβης

Η τύρβη είναι ένα σύνθετο και ασταθές φαινόμενο που εμφανίζεται σε πολλά φυσικά και τεχνητά συστήματα ροής, όπως οι ποταμοί, η ατμόσφαιρα, και τα μηχανικά συστήματα. Η κατανόηση και η μοντελοποίηση της τύρβης είναι κρίσιμες για την ανάλυση και τον σχεδιασμό πολλών εφαρμογών μηχανικής. Υπάρχουν διάφορα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση αυτών των φαινομένων, με τα πιο διαδεδομένα να είναι τα μοντέλα RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) και τα μοντέλα LES (Large Eddy Simulation).

Μοντέλα RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

Τα μοντέλα RANS βασίζονται στην μέση τιμή των εξισώσεων Navier-Stokes με την προσθήκη όρων τύρβης για την μοντελοποίηση των μικρών και ταχύτατων μεταβολών. Αυτά τα μοντέλα είναι ιδανικά για την ανάλυση ροών μεγάλης κλίμακας και χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανικές εφαρμογές λόγω της αποτελεσματικότητάς τους στον υπολογισμό. Τα πιο γνωστά μοντέλα RANS περιλαμβάνουν το k-ε και το k-ω μοντέλο, αλλά και το Spalart Allmaras, τα οποία βασίζονται στην επίλυση επιπλέον μεταφορικών εξισώσεων για την τύρβη.

Μοντέλα LES (Large Eddy Simulation)

Τα μοντέλα LES προσφέρουν μια πιο λεπτομερή και ακριβή απεικόνιση της τύρβης, επιλύοντας τις μεγάλες δίνες της ροής και μοντελοποιώντας τις μικρότερες. Η προσομοίωση LES απαιτεί μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ και χρόνο, καθιστώντας την κατάλληλη για εφαρμογές όπου η ακριβής καταγραφή των φαινομένων τύρβης είναι κρίσιμη. Η υψηλή ακρίβεια των LES μοντέλων τα καθιστά ιδανικά για επιστημονική έρευνα και προχωρημένες μηχανολογικές μελέτες.

Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου τύρβης εξαρτάται από τις συγκεκριμένες ανάγκες και τους περιορισμούς της κάθε εφαρμογής. Οι μηχανικοί και οι επιστήμονες επιλέγουν συχνά τον κατάλληλο συμβιβασμό μεταξύ ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους για την επίλυση των προβλημάτων τους.

1.3.2 Μοντέλα τύρβης στην σπουδαστική

Στην εργασία έγινε χρήση δύο μοντέλων RANS και συγκεκριμένα το Spalart-Allmaras καθώς και το k-ω SST.

"Τυπικό" Μοντέλο Μίας Εξίσωσης Spalart-Allmaras (SA)

Οι παρακάτω εξισώσεις αντιπροσωπεύουν την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη υλοποίηση του μοντέλου Spalart-Allmaras (γραμμένες σε μη συντηρητική μορφή).

Το μοντέλο μίας εξίσωσης δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u^* \partial v}{\partial x} = c_{b1}(1 - f_{t2})S_v - \left[c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{k^2}f_{t2} \right] \left(\frac{v}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_\kappa) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c_{b2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (3)$$

Το τυρβώδες ιξώδες υπολογίζεται από

$$\mu_\tau = \rho \nu f_{v1} \quad (4)$$

Όπου $f_{v1} = \frac{x^3}{x^3 + c_{v1}^3}$, $x = \frac{v}{v_\kappa}$, ρ η πυκνότητα, $v_\kappa = \frac{\mu}{\rho}$ το μοριακό κινητικό ιξώδες και μ είναι το μοριακό δυναμικό ιξώδες. Επιπρόσθετοι ορισμοί δίνονται από τις επόμενες εξισώσεις:

$$S = \Omega + \frac{v}{d^2 k^2} f_{v2} \quad (5)$$

Το $\Omega = (2W_{ij}W_{ij})^{0.5}$ είναι το μέγεθος στροβιλισμού, d είναι η απόσταση από το σημείο του πεδίου στον κοντινότερο τοίχο και

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, f_w = g * \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (6)$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), r = \min\left[\frac{v}{(Sk^2d^2)}, 10\right] \quad (7)$$

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4}x^2), W_{ij} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\theta u_i}{\theta \chi_j} - \frac{\theta u_j}{\theta \chi_i} \right) \quad (8)$$

Οι οριακές συνθήκες είναι :

$$v_{wall} = 0, v_{farfield} = 3v_\infty - 5v_\infty \quad , (9), (10)$$

Οι σταθερές είναι :

$$c_{b1} = 0.1355, \sigma = \frac{2}{3}, c_{b2} = 0.622, \kappa = 0.41, c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2, c_{v1} = 7.1$$

$$c_{t3} = 1.2, c_{t4} = 0.5, c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}, (11)-(20)$$

Ας σημειώσουμε ότι αυτό το μοντέλο έχει όρους πηγής (δημιουργίας και καταστροφής) οι οποίοι δεν είναι μηδενικοί κατά τη ροή. Είναι όμως πολύ μικροί αναλογικά με τη ποσότητα $1/d^2$ [9],[11].

k-ω SST

Το μοντέλο k-ω-SST είναι ένα διπλό εξίσωτικό μοντέλο που αφορά την κινητική ενέργεια τύρβης (k) και τον ειδικό ρυθμό διάλυσης τύρβης (ω). Στοχεύει στην αντιμετώπιση των αδυναμιών του τυπικού μοντέλου k-ω αναφορικά με την εξάρτηση από τις τιμές ελεύθερου ρεύματος των k και ω. Είναι ικανό να καταγράψει τον διαχωρισμό της ροής. Η παραλλαγή του OpenFOAM βασίζεται στο μοντέλο του 2003.

Εξισώσεις του Μοντέλου

Η εξίσωση του ειδικού ρυθμού διάλυσης τύρβης δίνεται από:

$$\frac{D(\rho\omega)}{Dt} = \nabla \cdot (\rho D_\omega \nabla \omega) + \rho \gamma G_\omega - \frac{2}{3} \rho \gamma \omega (\nabla * u) - \rho \beta \omega^2 - \rho (F_1 - 1) C_{Dk\omega} + S_\omega \quad (21)$$

και η εξίσωση της κινητικής ενέργειας τύρβης από:

$$\frac{D(\rho k)}{Dt} = \nabla \cdot (\rho D_k \nabla k) + \rho G - \frac{2}{3} \rho k (\nabla * u) - \rho \beta * \omega k + S_k \quad (22)$$

Η ιξώδες τύρβης λαμβάνεται χρησιμοποιώντας:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, b_1 F_{23} S)} \quad (23), [10].$$

1.4 ΟΡΙΑΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ Y^+

Η πηγή της NASA αναφέρει :

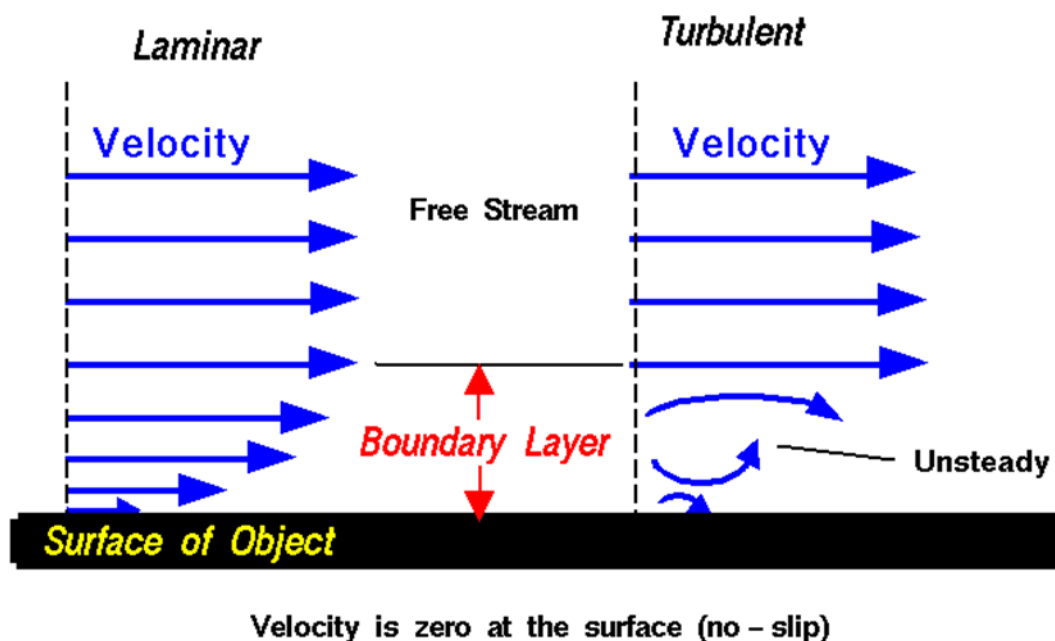
Οι αεροδυναμικές δυνάμεις εξαρτώνται με πολύπλοκο τρόπο από το ιξώδες του ρευστού. Καθώς το ρευστό ρέει γύρω από το αντικείμενο, τα μόρια ακριβώς δίπλα στην επιφάνεια κολλάνε στην επιφάνεια. Τα μόρια λίγο πάνω από την επιφάνεια επιβραδύνονται στις συγκρούσεις τους με τα μόρια που κολλάνε στην επιφάνεια. Αυτά τα μόρια με τη σειρά τους επιβραδύνουν τη ροή ακριβώς πάνω τους. Όσο πιο μακριά από την επιφάνεια κινείται κανείς, τόσο λιγότερες είναι οι συγκρούσεις που επηρεάζονται από την επιφάνεια του αντικειμένου. Αυτό δημιουργεί ένα λεπτό στρώμα ρευστού κοντά στην επιφάνεια στο οποίο η ταχύτητα αλλάζει από μηδέν στην επιφάνεια μέχρι την ταχύτητα της ελεύθερης ροής μακριά από την επιφάνεια. Οι μηχανικοί ονομάζουν αυτό το στρώμα ,το **οριακό στρώμα** επειδή συμβαίνει στο όριο του ρευστού [2].

Τύποι οριακών στρωμάτων

Τα οριακά στρώματα μπορεί να είναι είτε **στρωτά** (διατεταγμένα σε στρώσεις), είτε **τυρβώδη** (ακατάστατα) ανάλογα με την τιμή του αριθμού Reynolds. Για χαμηλότερους αριθμούς Reynolds, το οριακό στρώμα είναι στρωτό και η διαμήκης ταχύτητα αλλάζει ομοιόμορφα καθώς κάποιος απομακρύνεται από τον τοίχο, όπως φαίνεται στην αριστερή πλευρά της εικόνας. Για υψηλότερους αριθμούς Reynolds, το οριακό στρώμα είναι τυρβώδες και η διαμήκης ταχύτητα χαρακτηρίζεται από ασταθείς (μεταβαλλόμενες με τον χρόνο) στροβιλιζόμενες ροές μέσα στο οριακό στρώμα. Η εξωτερική ροή αντιδρά στην άκρη του οριακού στρώματος όπως θα αντιδρούσε στην φυσική επιφάνεια ενός αντικειμένου. Έτσι, το οριακό στρώμα δίνει σε οποιοδήποτε αντικείμενο ένα "αποτελεσματικό" σχήμα που συνήθως είναι ελαφρώς διαφορετικό από το φυσικό

Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών – Αεροναυπηγών

σχήμα. Για να κάνουμε τα πράγματα πιο απλά, το οριακό στρώμα μπορεί να αποκολληθεί ή να "διαχωριστεί" από το σώμα και να δημιουργήσει ένα αποτελεσματικό σχήμα πολύ διαφορετικό από το φυσικό σχήμα. Αυτό συμβαίνει επειδή η ροή στο οριακό στρώμα έχει πολύ χαμηλή ενέργεια (σχετικά με την ελεύθερη ροή) και επηρεάζεται ευκολότερα από τις αλλαγές στην πίεση. Ο διαχωρισμός της ροής είναι ο λόγος για την απώλεια στήριξης της πτέρυγας σε υψηλή γωνία προσβολής. Οι επιδράσεις του οριακού στρώματος στην ανύψωση περιλαμβάνονται στον συντελεστή ανύψωσης και οι επιδράσεις στην οπισθέλκουσα περιλαμβάνονται στον συντελεστή οπισθέλκουσας [2].



Εικόνα 1 Οπτικοποίηση οριακών στρωμάτων NASA. (n.d.). *Boundary Layer*. NASA Glenn Research Center. Ανακτήθηκε από [NASA](#).

Τα οριακά στρώματα σε μια επίπεδη πλάκα είναι σημαντικά στη μελέτη της δυναμικής των ρευστών. Εδώ θα βρείτε μια σύντομη περιγραφή του στρωτού και τυρβώδους οριακού στρώματος, καθώς και τους βασικούς τύπους που χρησιμοποιούνται για την ανάλυσή τους.

Στρωτό οριακό στρώμα

Για μια στρωτή ροή πάνω από μια επίπεδη πλάκα, ο πάχος του οριακού στρώματος (δ) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\delta(x) = \frac{4.91x}{Re_x^{0.5}} \quad (24)$$

όπου x είναι η απόσταση από την αρχή της πλάκας και Re_x είναι ο τοπικός αριθμός Reynolds που δίνεται από:

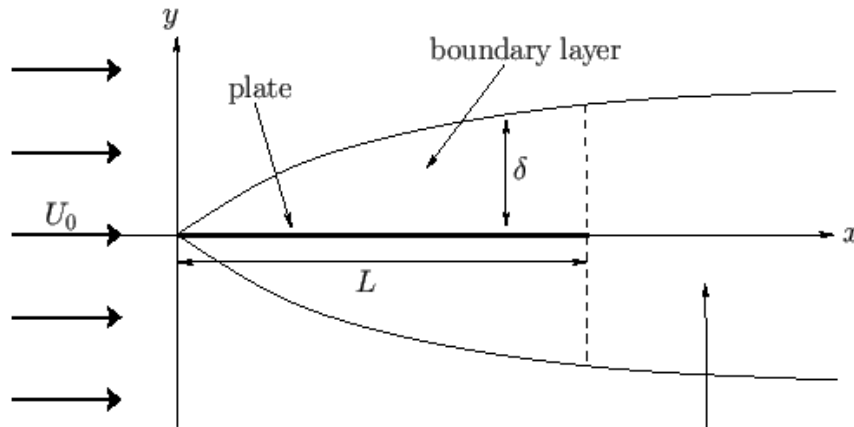
$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (25)$$

εδώ, U_∞ είναι η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος και ν είναι το κινηματικό ιξώδες.

Τυρβώδες Οριακό Στρώμα

Για τυρβώδη ροή πάνω από μια επίπεδη πλάκα, το πάχος του οριακού στρώματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\delta(x) = 0.37x \left(\frac{x}{Re_x} \right)^{0.2} \quad (26)$$



Εικόνα 2 Οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας Fitzpatrick, R. (n.d.). *The Boundary Layer*. The University of Texas at Austin. Ανακτήθηκε από [The University of Texas at Austin](http://www.utexas.edu).

Y^+

Το y^+ είναι μια αδιάστατη παράμετρος που χρησιμοποιείται στη δυναμική των ρευστών και συγκεκριμένα στην τυρβώδη ροή για να εκφράσει την απόσταση από την επιφάνεια σε σχέση με την τυρβώδη ταχύτητα τριβής και την κινηματική ιξώδη. Είναι σημαντικός στη μελέτη των τυρβωδών οριακών στρωμάτων, καθώς βοηθά στη διαμόρφωση των προσεγγίσεων για την κατανομή της ταχύτητας κοντά στην επιφάνεια.

Ο τύπος για το y^+ είναι:

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (26)$$

όπου:

- y είναι η απόσταση από την επιφάνεια της πλάκας,
- u_τ είναι η τυρβώδης ταχύτητα τριβής, και

- ν είναι το κινηματικό ιξώδες.

Η τιμή του y^+ χρησιμοποιείται για να κατηγοριοποιήσει τις διαφορετικές περιοχές μέσα στο οριακό στρώμα:

- Για $y^+ < 5$, η περιοχή είναι γνωστή ως υπόστρωμα τριβής (viscous sublayer), όπου η τυρβώδης ροή είναι ασήμαντη και η κατανομή της ταχύτητας είναι γραμμική.
- Για $5 < y^+ < 30$, είναι η μεταβατική περιοχή (buffer layer), όπου η τυρβώδης ροή αρχίζει να αυξάνεται.
- Για $y^+ > 30$, είναι η τυρβώδης περιοχή (log-law region), όπου η τυρβώδης ανάμειξη κυριαρχεί και η κατανομή της ταχύτητας ακολουθεί τον νόμο του τοίχου [15],[16],[17],[18],[19],[20].

1.5 ΛΥΤΗΣ SIMPLEFOAM

Σε αυτό το σημείο να ειπωθούν κάποια λόγια για τον λύτη που χρησιμοποιήθηκε στο OpenFOAM. Αρχικά, ο λύτης μελετάει steady-state και για αυτό δε αποτελεί έγνοια και ο αριθμός Courant οπότε ενδείκνυται να χρησιμοποιηθεί όποιο Δt θέλει ο χρήστης. Τέλος, βασίζεται στη μέθοδο Simple .

Σε αυτό το σημείο παρατίθεται και ο **ορισμός** του αριθμού Courant :

Ο αριθμός Courant, γνωστός και ως αριθμός Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), είναι μια αδιάστατη παράμετρος που χρησιμοποιείται στη αριθμητική ανάλυση μεθόδων πεπερασμένων

διαφορών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, ιδιαίτερα στις προσομοιώσεις ροής ρευστών.

$$\text{Ορίζεται ως: } CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (27)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του ρευστού, Δt είναι το χρονικό βήμα και Δx είναι το χωρικό βήμα του δικτύου. Ο αριθμός CFL είναι κρίσιμος για τη σταθερότητα της αριθμητικής μεθόδου: εάν ο αριθμός CFL υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή, η αριθμητική λύση μπορεί να γίνει ασταθής [21].

Μέθοδος SIMPLE

Η μέθοδος SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) επιτρέπει τη σύζευξη των εξισώσεων Navier-Stokes με μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία συνοψίζεται ως εξής:

1. Ορισμός οριακών συνθηκών.
2. Λύση της διακριτής εξίσωσης ορμής για τον υπολογισμό του ενδιάμεσου πεδίο ταχυτήτων.
3. Υπολογισμός των ροών μάζας στις επιφάνειες των κελιών.
4. Λύση της εξίσωσης πίεσης και εφαρμογή υποχαλάρωσης.
5. Διόρθωση των ροών μάζας στις επιφάνειες των κελιών.
6. Διόρθωση των ταχυτήτων με βάση το νέο πεδίο πίεσης.
7. Ενημέρωση των οριακών συνθηκών.
8. Επανάληψη μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.

Τα βήματα 4 και 5 μπορούν να επαναληφθούν για ένα προκαθορισμένο αριθμό φορές για διόρθωση μη ορθογωνιότητας ([OpenFOAMWiki](#)).

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλυθεί η μαθηματική και υπολογιστική μοντελοποίηση και πως αυτή προκύπτει από το OpenFOAM καθώς και θα παρουσιαστούν αποτελέσματα της προσομοίωσης. Επίσης, θα αναλυθεί και το OpenVSP που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία γεωμετρίας και εν τέλει θα δειχθεί η συμπερασματολογία της παρούσας εργασίας.

2.1 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Υπάρχουν ποικίλοι τρόποι που μπορεί κάποιος να δομήσει πλέγμα για μια γεωμετρία στο OpenFoam. Οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα σπουδαστική εργασία είναι το *blockMesh* και το *snappyHexMesh*.

Ως αναφορά το blockMesh : δημιουργεί παραμετρικά πλέγματα με βαθμολόγηση και καμπύλες ακμές. Το πλέγμα δημιουργείται από ένα αρχείο λεξικού με όνομα blockMeshDict που βρίσκεται στον κατάλογο constant/polyMesh μιας περίπτωσης. Το blockMesh διαβάζει αυτό το λεξικό, δημιουργεί το πλέγμα και γράφει τα δεδομένα του πλέγματος σε αρχεία points, faces, cells και boundary στον ίδιο κατάλογο.

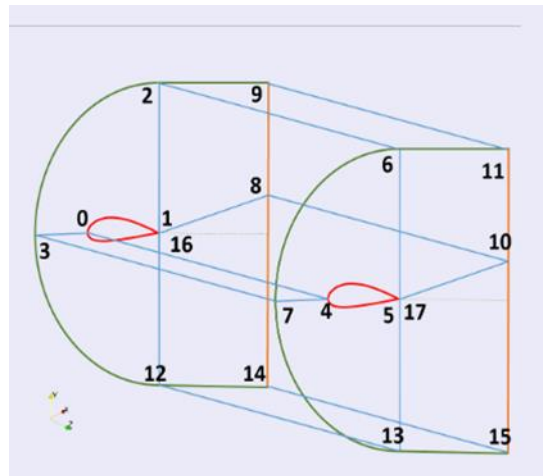
Η αρχή πίσω από το blockMesh είναι η αποσύνθεση της γεωμετρίας του πεδίου σε ένα σύνολο από έναν ή περισσότερους τρισδιάστατους, εξαγωνικούς μπλοκ. Οι ακμές των μπλοκ μπορούν να είναι ευθείες γραμμές, τόξα ή καμπύλες. Το πλέγμα ορίζεται κυρίως ως αριθμός κελιών σε κάθε κατεύθυνση του μπλοκ, επαρκείς πληροφορίες για να μπορέσει το blockMesh να δημιουργήσει τα δεδομένα του πλέγματος [12].

Ως αναφορά το snappyHexMesh : δημιουργεί τρισδιάστατα πλέγματα που περιέχουν εξαγωνικά στοιχεία (hex) και διαιρεμένα εξαγωνικά στοιχεία (split-hex) αυτόματα από τριγωνοποιημένες γεωμετρίες επιφάνειας σε μορφή Stereolithography (STL). Το πλέγμα προσαρμόζεται περίπου στην επιφάνεια μέσω επαναληπτικής βελτίωσης ενός αρχικού πλέγματος και μετασχηματισμού του προκύπτοντος διαιρεμένου εξαγωνικού πλέγματος στην επιφάνεια. Μια προαιρετική φάση θα συρρικνώνει το προκύπτον πλέγμα και θα εισάγει στρώματα κελιών. Η προδιαγραφή του επιπέδου βελτίωσης του πλέγματος είναι πολύ ευέλικτη και ο χειρισμός της επιφάνειας είναι ανθεκτικός με προκαθορισμένη τελική ποιότητα πλέγματος. Λειτουργεί παράλληλα με ένα βήμα εξισορρόπησης φορτίου σε κάθε επανάληψη [13].

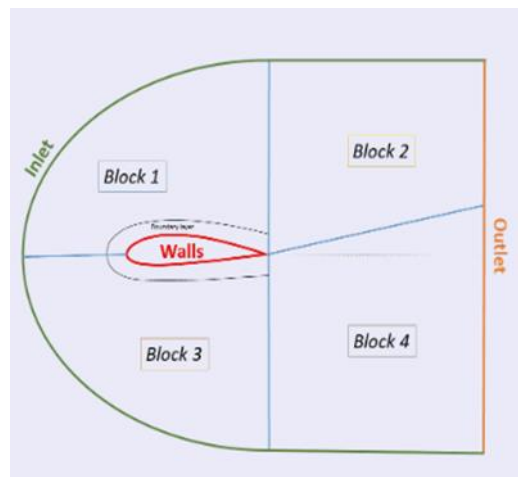
2.1.1 BlockMeshDict

Στο παρόν κείμενο θα γίνει η ανάλυση του case που χτίστηκε στο OpenFOAM. Για το θέμα έχει φτιαχτεί C-mesh και οι αποστάσεις είναι **10c** για το inlet και **20c** για το outlet . Οι αποστάσεις αποφασίστηκαν να είναι αυτές καθώς αυτές βρέθηκαν να χρησιμοποιούνται στο επιλεγμένο paper που συνέκρινα με το case μου[14].

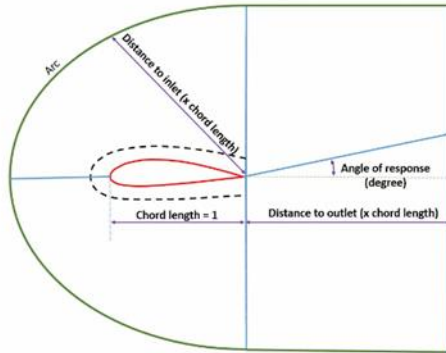
Η γεωμετρία χωρίζεται σε 4 block και χρειάζονται 18 σημεία για να προσδιοριστεί πλήρως. Το γεγονός όμως ότι το σημείο 5,17 και 1,16 έχει τις ίδιες συντεταγμένες καθιστά τα σημεία 16. Αλλά επειδή το block 2 και 4 δεν συνδέονται θα χρειαστεί το mergePatch. Το οριακό στρώμα ορίζεται από σύνθετο edgegrading για να μη φτιαχτεί άλλο block.



Εικόνα 3 Τα 18 σημεία του blockMesh



Εικόνα 4 Τα 4 block της γεωμετρίας



Εικόνα 5 Οι γεωμετρικές αποστάσεις από την είσοδο και την έξοδο για την αεροτομή

Αφού χτίστηκε το blockMeshDict εφαρμόστηκε στο tutorial airFoil2D για να υπάρχει κάλυψη ως προς τα άλλα Dictionaries. Όσο αναφορά τον αριθμό Reynolds ισχύει ότι :

$$Re = u * \frac{l}{\nu} \quad (28)$$

Για να τρέξει η προσομοίωση στα αντίστοιχα Reynolds ώστε να μπορεί να συγκριθεί με τη βιβλιογραφία έπρεπε να προσαρμοστεί η ταχύτητα βάση της γεωμετρίας που κατασκευάστηκε στο blockMeshDict. Έχοντας αριθμό Reynolds 68490 και γνωστό το $u_{\infty} = 10 \text{ m/s}$ και το μήκος αεροτομής $c=0.1 \text{ m}$ υπολογίζεται το κινητικό ιξώδες.

Το κινητικό ιξώδες είναι $1.46e^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ και έχοντας αυτό σαν δεδομένο ενδείκνυται πλέον να βρεθεί από το engineering toolbox η πυκνότητα του αέρα που είναι 1.22 kg/m^3 .

Έτσι, προκύπτουν τα κάτωθι δεδομένα για την περίπτωση που μελετήθηκε :

$\rho(\text{kg/m}^3)$	1.22
$u(\text{m/s})$	1
$c(\text{m})$	1
$\nu(\text{m}^2/\text{s})$	$1.46e^{-05}$

πίνακας 1 φυσικά μεγέθη μελέτης

Για να πραγματοποιηθεί η μελέτη για τις διάφορες γωνίες προσβολής πρέπει να οριστεί η ταχύτητα στο x και στον y άξονα κάθε φορά πολλαπλασιάζοντας την u_{∞} με το ημίτονο και το συνημίτονο :

$$u_x = u_{\infty} * \cos(\text{angle_of_attack}) \quad (29)$$

$$u_y = u_{\infty} * \sin(\text{angle_of_attack}) \quad (30)$$

Για να υπολογιστούν τέλος οι συντελεστές C_L και C_D χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση ForceCoeffs και εκεί χρειάζεται προσοχή σε δύο μέρη :

- 1) Πρέπει να γίνει σωστός ορισμός των διευθύνσεων των αξόνων της οπισθέλκουσας και της άνωσης .Είναι γνωστό ότι οι άξονες αυτοί επηρεάζονται από την γωνία επίθεσης της ταχύτητας ελεύθερου πεδίου. Δηλαδή θα πρέπει:

$$\text{Liftdir} \Rightarrow (-\sin(\text{angle_of_attack}), \cos(\text{angle_of_attack}), 0) \quad (31)$$

$$\text{Dragdir} \Rightarrow (\cos(\text{angle_of_attack}), \sin(\text{angle_of_attack}), 0) \quad (32), \text{ όπως ορίζει και το βιβλίο Fundamentals of aerodynamics [15].}$$

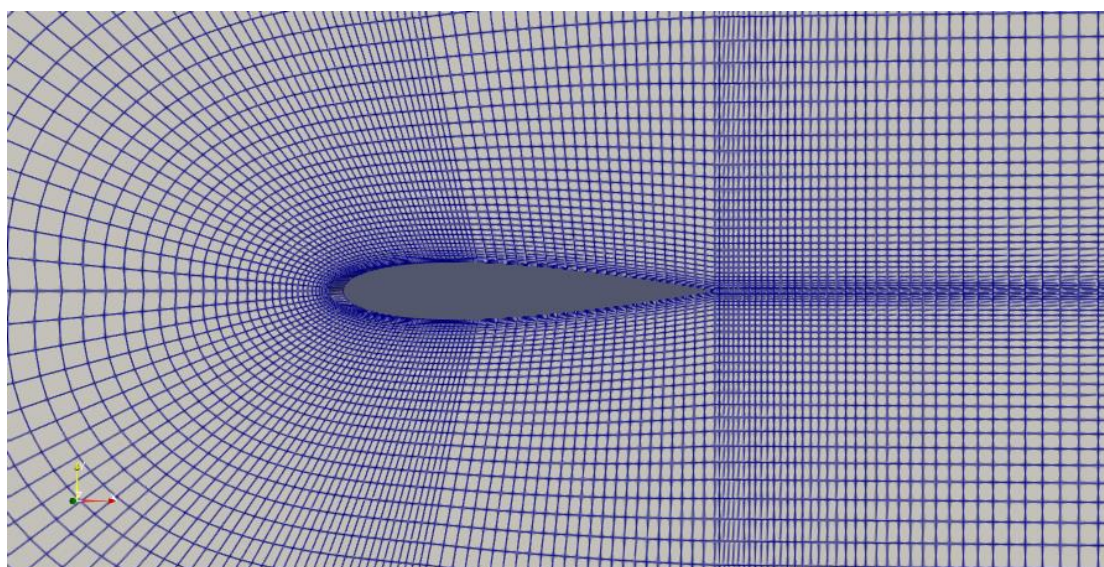
- 2) Επίσης , θα πρέπει να οριστεί ένας χρόνος ώστε να συγκλίνει η προσομοίωση .Ορίστηκε να είναι τα 1000 δευτερόλεπτα καθώς εκεί παρατηρήθηκε ότι μειώνονται οι επαναλήψεις του λύτη αλλά και δεν αλλάζανε τα αποτελέσματα.

Εφαρμόζοντας τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες βάσει όσων αναφέρθηκαν παραπάνω για τα δύο ξέχωρα μοντέλα τύρβης βρέθηκαν τα κάτωθι αποτελέσματα :

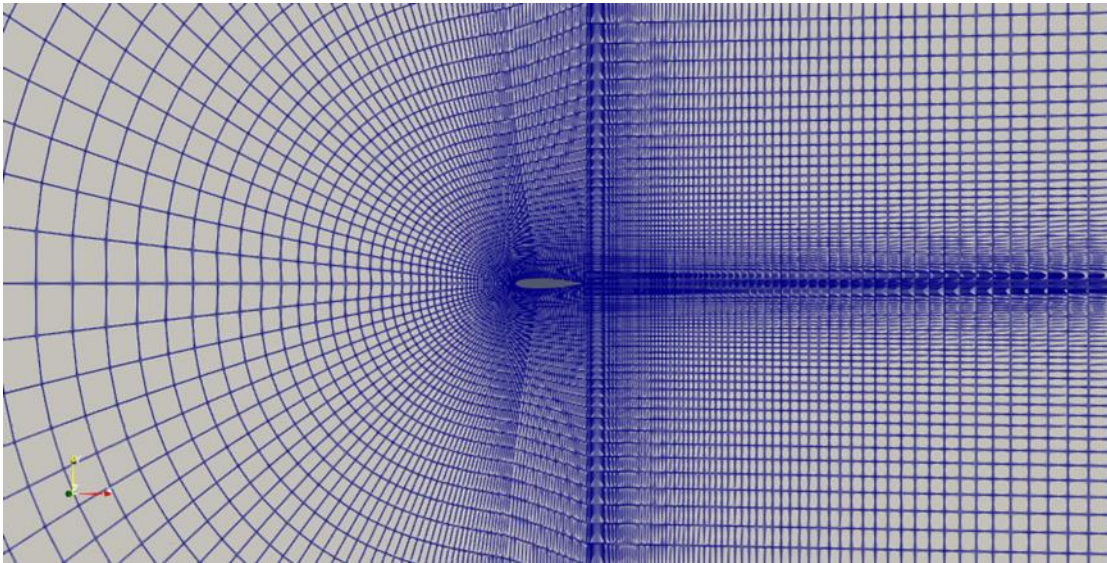
<i>Μοίρες</i>	δεδομένα		Spalart-Allmaras		k-ω SST	
	C_l	C_D	C_l	C_D	C_l	C_D
5	0.28	0.04	0.42	0.0288	0.41	0.043
10	0.50	0.09	0.66	0.063	0.74	0.07
12	0.56	0.12	0.45	0.14	0.74	0.099

πίνακας 2 Δεδομένα και CFD για 14300 κελιά

Το μοντέλο k- ω SST προσεγγίζει καλύτερα τα δεδομένα από το άρθρο . Για αυτό και η μελέτη σύγκλισης θα γίνει για το μοντέλο k- ω SST. Σε αυτό το σημείο να τονιστεί ότι το πλέγμα είναι 14300 κελιών και παρουσιάζεται στη κάτωθι εικόνα :



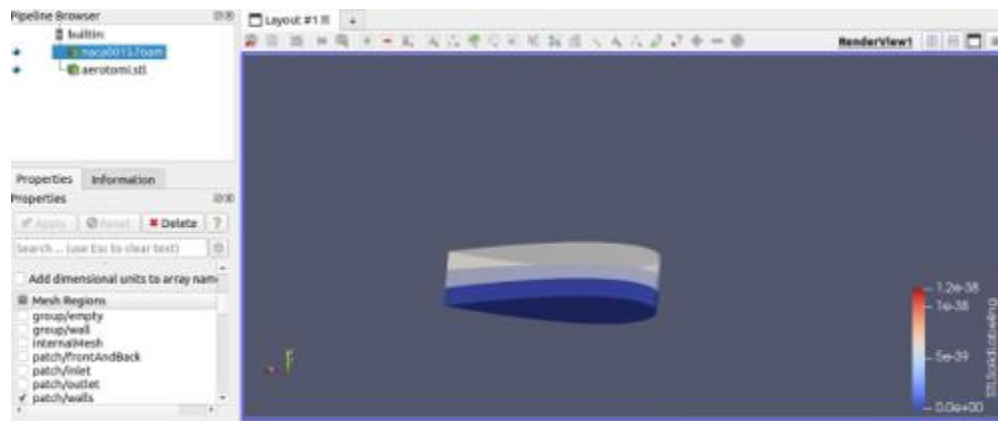
εικόνα 6:Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή -zoom



εικόνα 7: Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή -zoom out

2.1.2 SnappyHexMeshDict & OpenVSP

Για να δομηθεί το case έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο του snappyHexMesh θα πρέπει πρώτα να φτιαχτεί η γεωμετρία εκτός του OpenFOAM . Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε το πακέτο openVSP. Έτσι, σχεδιάστηκε μια πτέρυγα με πλάτος 0.3 m και φυσικά με τα χαρακτηριστικά της naca0015 . Η γεωμετρία από ότι φαίνεται ταιριάζει ακριβώς με τα όρια του προηγούμενου case.



Εικόνα 8 : Ταίριασμα γεωμετρίας

Το πρόβλημα που έχει όμως το snappyHexMesh είναι ότι δημιουργεί πλέγμα για τρισδιάστατες δομές . Έτσι, θα έπρεπε να εφαρμοστεί ένα κόλπο. Συγκεκριμένα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση extrudeMesh ώστε το ένα patch και να βγει σαν layer. Τέλος , χρησιμοποιείται η βιβλιοθήκη createPatch ώστε το layer να μπορεί να γίνει ξανά patch [22]. Εφαρμόστηκαν και για αυτό το είδος προσομοίωσης τα δύο μοντέλα τύρβης.

Τα δεδομένα είναι :

<i>Μοίρες (°)</i>	<i>Δεδομένα</i>	
	C_L	C_D
5	0.28	0.04
10	0.5	0.09
12	0.56	0.12

πίνακας 3 Δεδομένα για τις συγκεκριμένες γωνίες επίθεσης

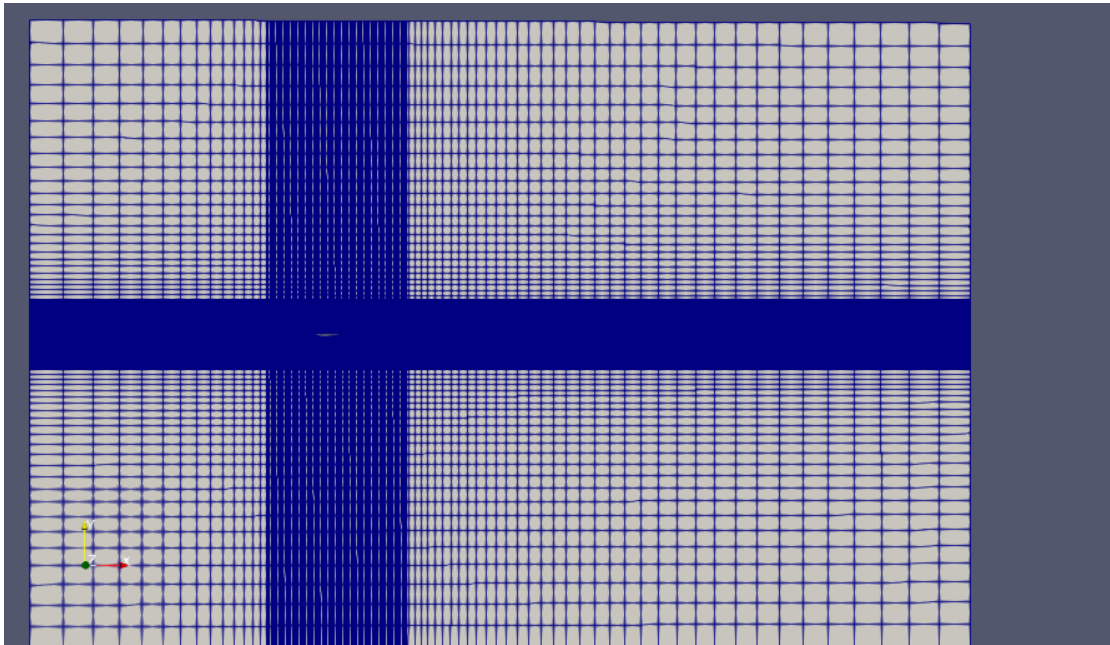
Και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων είναι :

Spalart-snappy		k- ω SST	
C_L	C_D	C_L	C_D
0.45	0.023	0.41	0.036
0.67	0.07	0.7	0.07
0.51	0.14	0.58	0.14

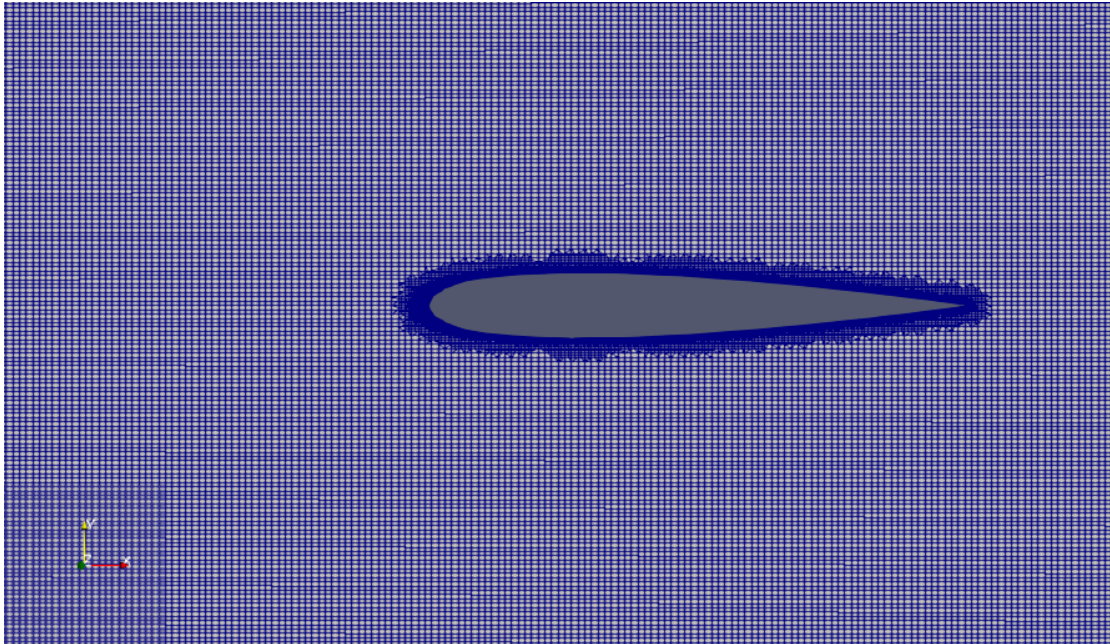
πίνακας 4 Για 92470 κελιά με χρήση SnappyHexMesh και 12000 background Mesh

Και σε αυτή την περίπτωση θα προτιμηθεί το μοντέλο k- ω SST και θα ακολουθήσει η μελέτη ανεξαρτησίας του πλέγματος καθότι τα αποτελέσματα φαίνεται να προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα . Επίσης , να τονιστεί ότι επιλέχθηκε το y^+ να είναι διακόσια (200) για να αποφευχθεί επιπλέον υπολογιστικό κόστος και υπολογίστηκε το μήκος κάθε κελιού από opensource πρόγραμμα [23] .

Σε αυτή τη φάση προβλέπεται να παρουσιαστεί το πλέγμα με τη χρήση SnappyHexMesh.



εικόνα 9 : Πλέγμα με τη χρήση του SnappyHexmesh-zoom out



εικόνα 10 : Πλέγμα με τη χρήση του SnappyHexMesh-zoom in

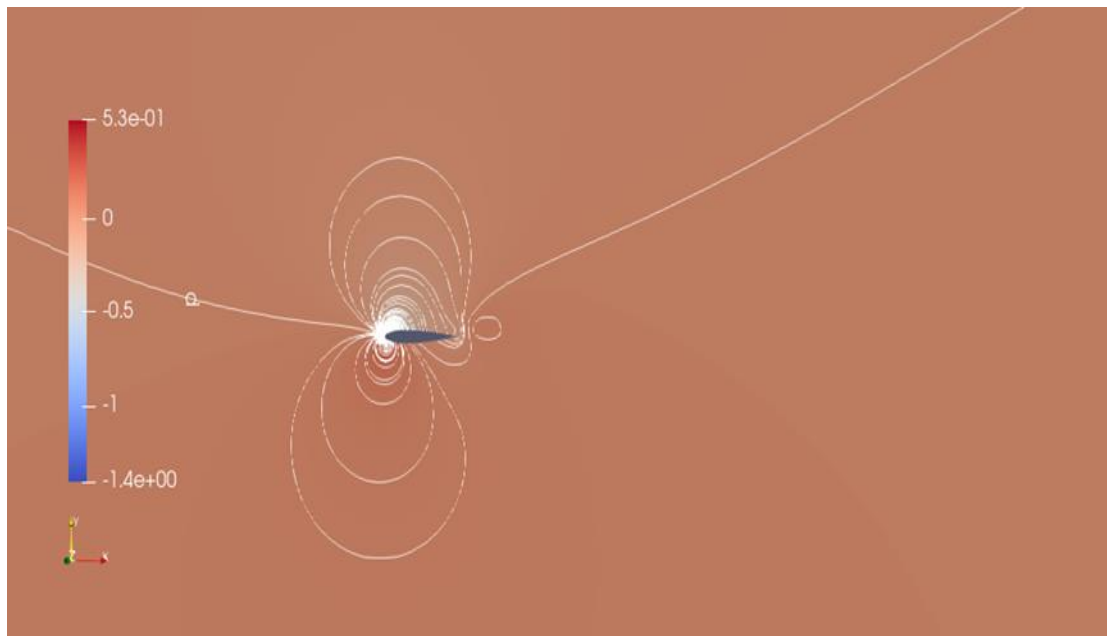
OpenVSP

Το OpenVSP (Open Vehicle Sketch Pad) είναι ένα λογισμικό ανοιχτού κώδικα που αναπτύχθηκε από τη NASA για τη δημιουργία και τον σχεδιασμό τρισδιάστατων μοντέλων αεροδιαστημικών οχημάτων. Το OpenVSP επιτρέπει στους χρήστες να δημιουργούν γεωμετρικά ακριβή μοντέλα αεροσκαφών και άλλων αεροδιαστημικών οχημάτων χρησιμοποιώντας παραμετρικές επιφάνειες. Με αυτό το εργαλείο, οι χρήστες μπορούν να εξετάσουν τη γεωμετρία των αεροσκαφών, να κάνουν αναλύσεις αεροδυναμικής, καθώς και να εξάγουν τα μοντέλα σε διάφορα μορφότυπα για περαιτέρω ανάλυση σε άλλα λογισμικά.

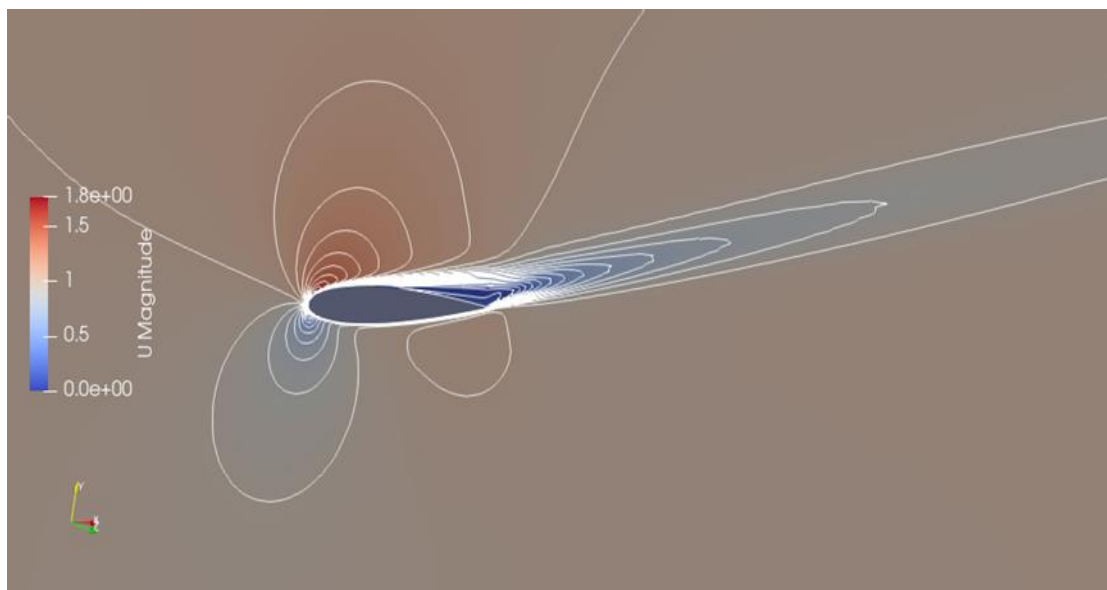
Το OpenVSP είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την προ-σχεδίαση αεροδιαστημικών οχημάτων, επιτρέποντας την ταχεία δημιουργία και αξιολόγηση διαφορετικών σχεδιαστικών επιλογών. Οι δυνατότητες του περιλαμβάνουν τον καθορισμό παραμετρικών επιφανειών, την ανάλυση του βέλτιστου αεροδυναμικού σχεδιασμού και την ενσωμάτωση των δεδομένων σε άλλα εργαλεία ανάλυσης.

2.2 ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

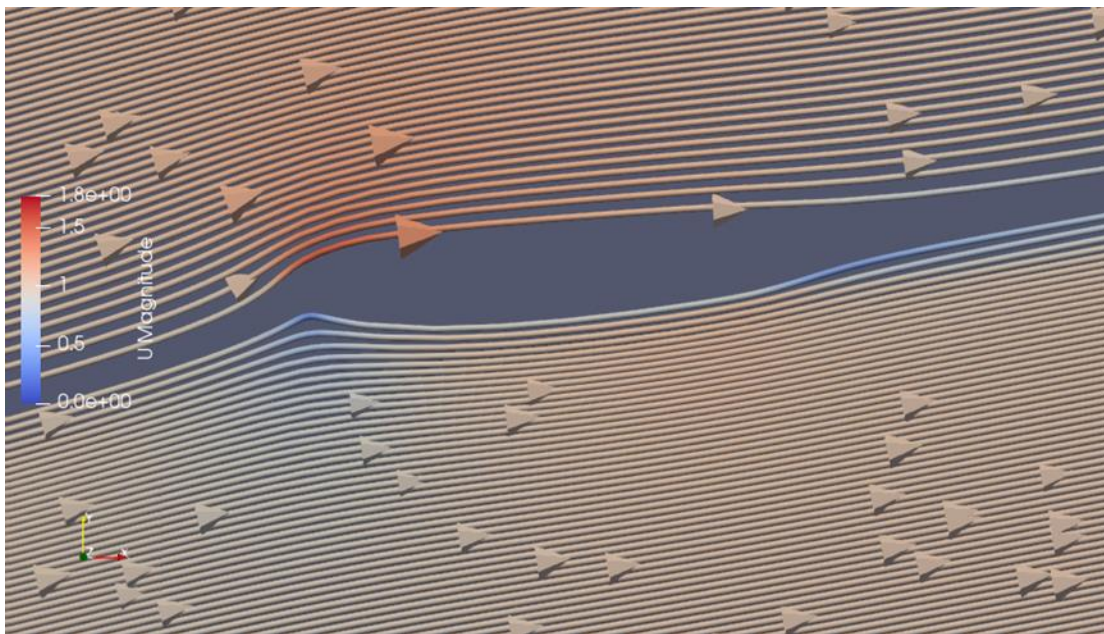
Σε αυτό το σημείο επιλέχθηκε να παρουσιαστούν κάποια επιπλέον αποτελέσματα που προκλήθηκαν από τις προσομοιώσεις . Αυτό έγινε κυρίως για να παρατηρηθεί η ροή του απορεύματος καθώς και οι ισοβαρείς και ισοταχείς καμπύλες .



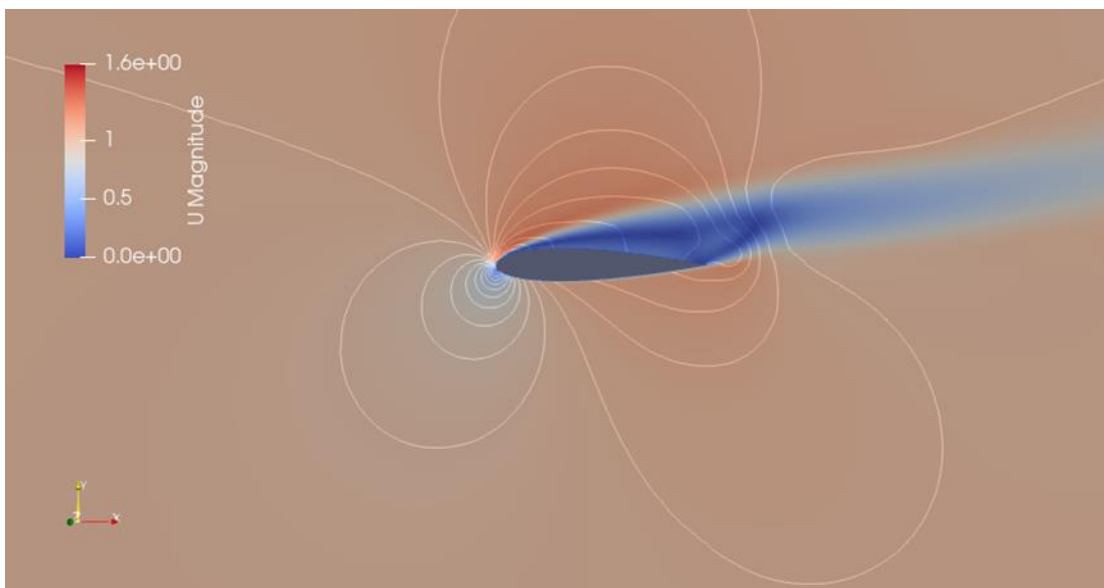
Εικόνα 11: Ισοβαρείς καμπύλες για k- ω SST -blockMeshDict



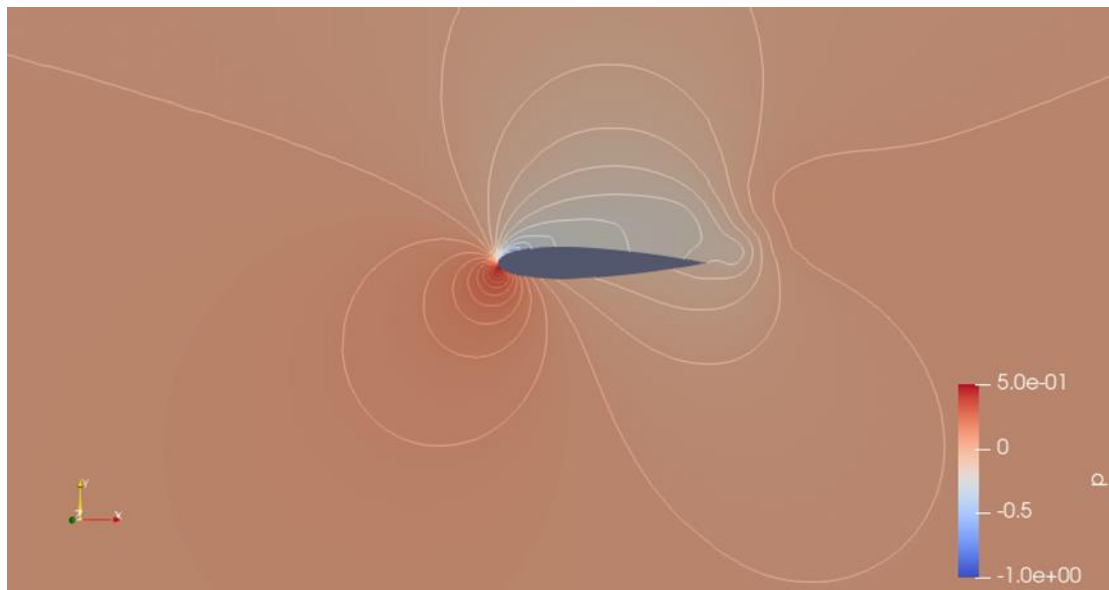
Εικόνα 12 : Ισοταχείς καμπύλες για k- ω SST -blockMeshDict



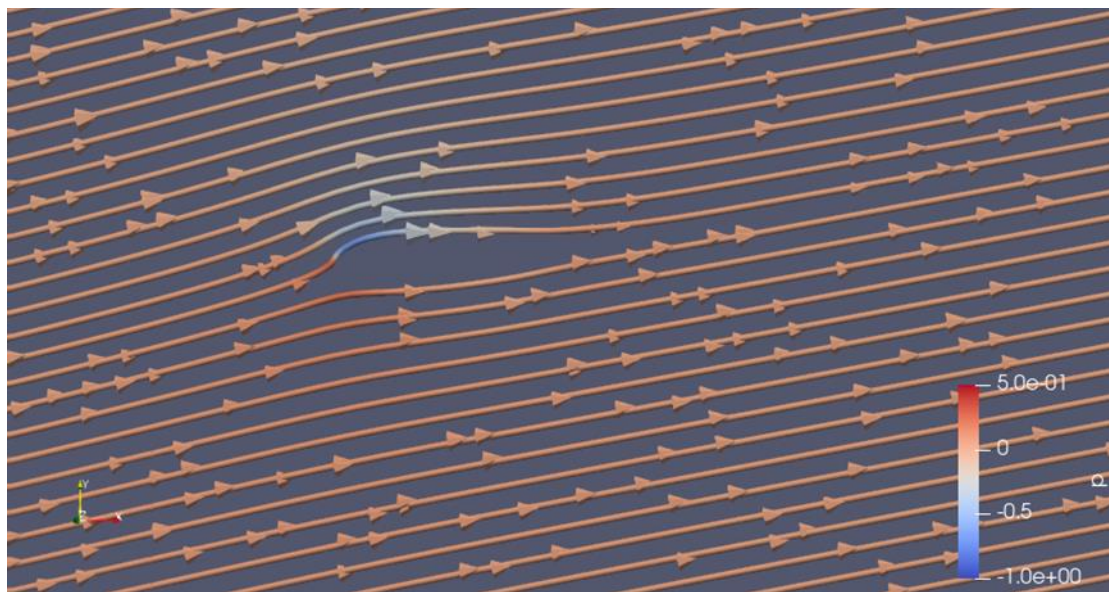
Εικόνα 13 ροϊκές γραμμές k- ω SST -blockMeshDict



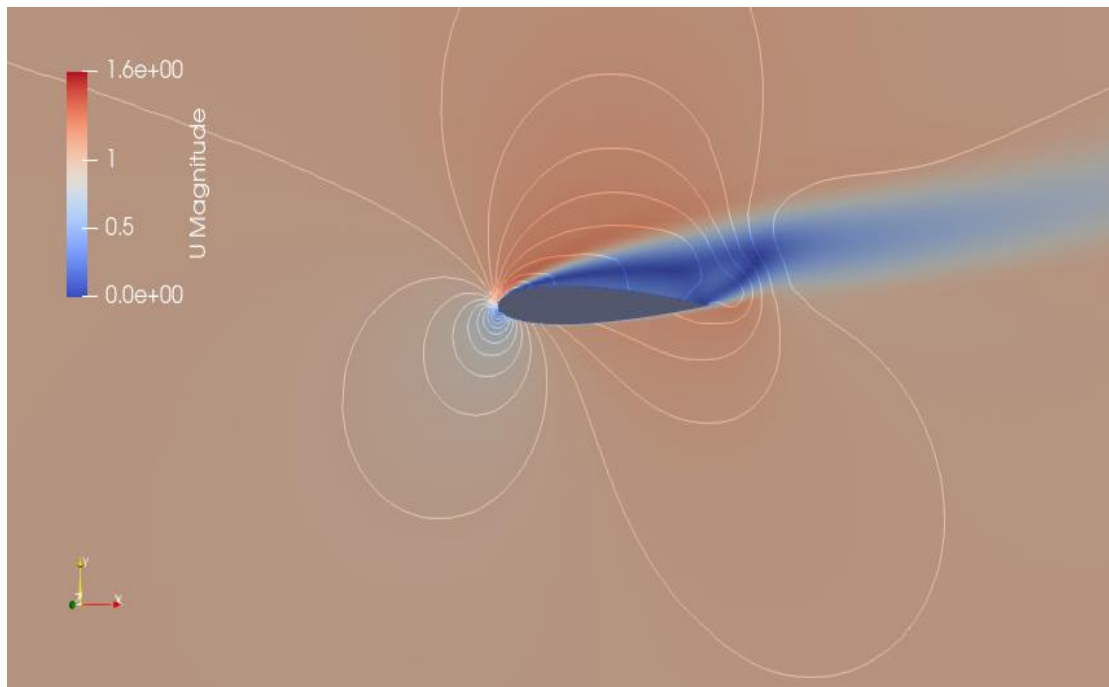
Εικόνα 14: Ισοταχείς καμπύλες για Spalart Allmaras-blockMeshDict



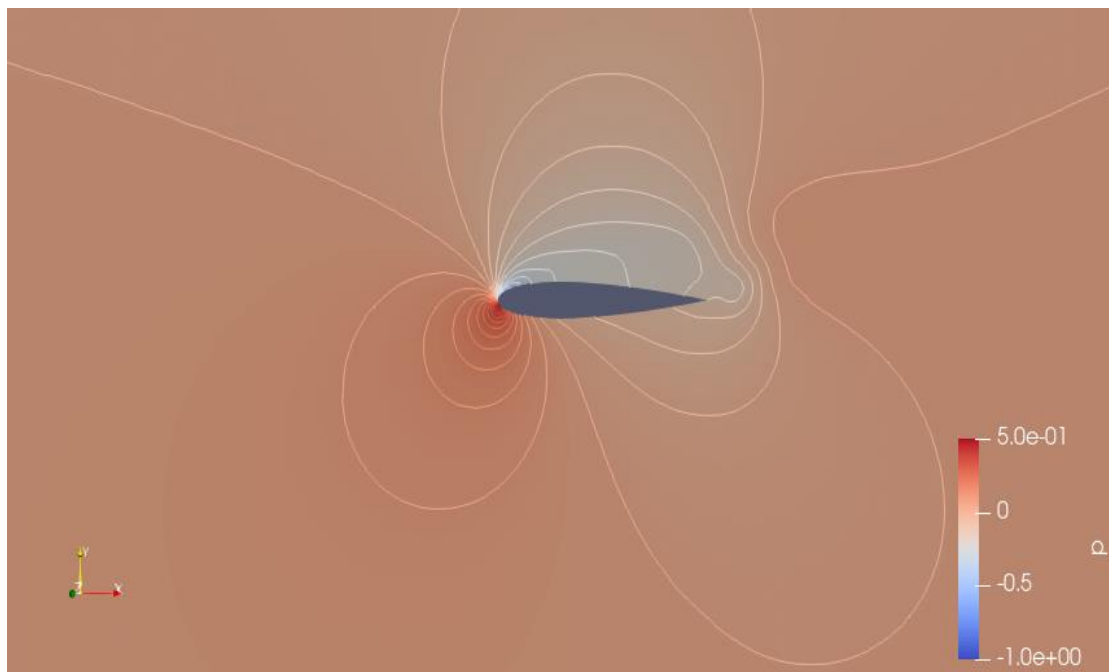
Εικόνα 15: Ισοβαρείς καμπύλες για Spalart Allmaras -blockMeshDict



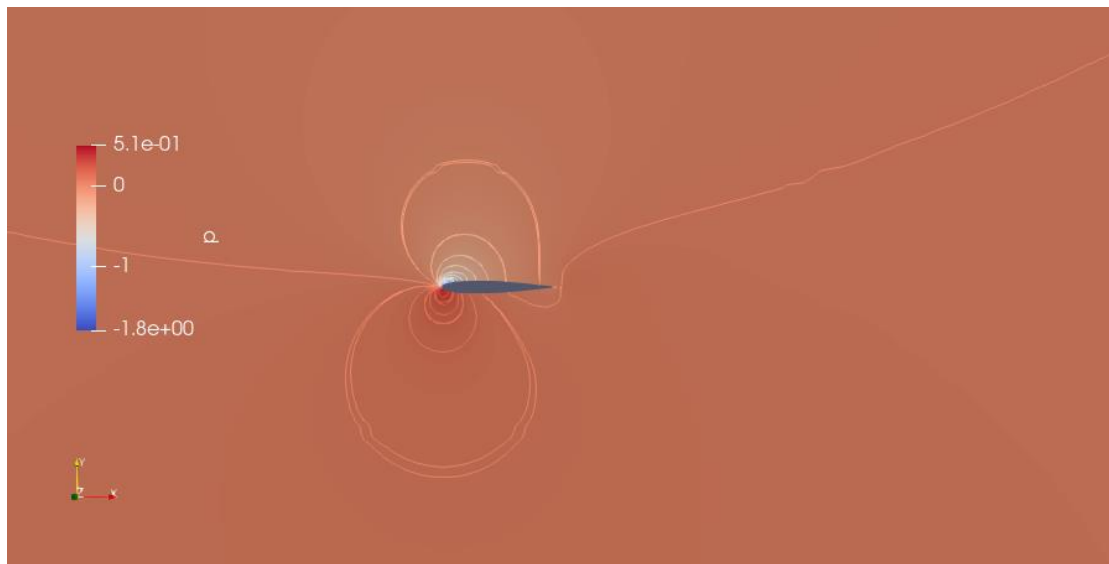
Εικόνα 16: Ροικές γραμμές ταχύτητας σε συνδυασμό με την αναπαράσταση πίεσης



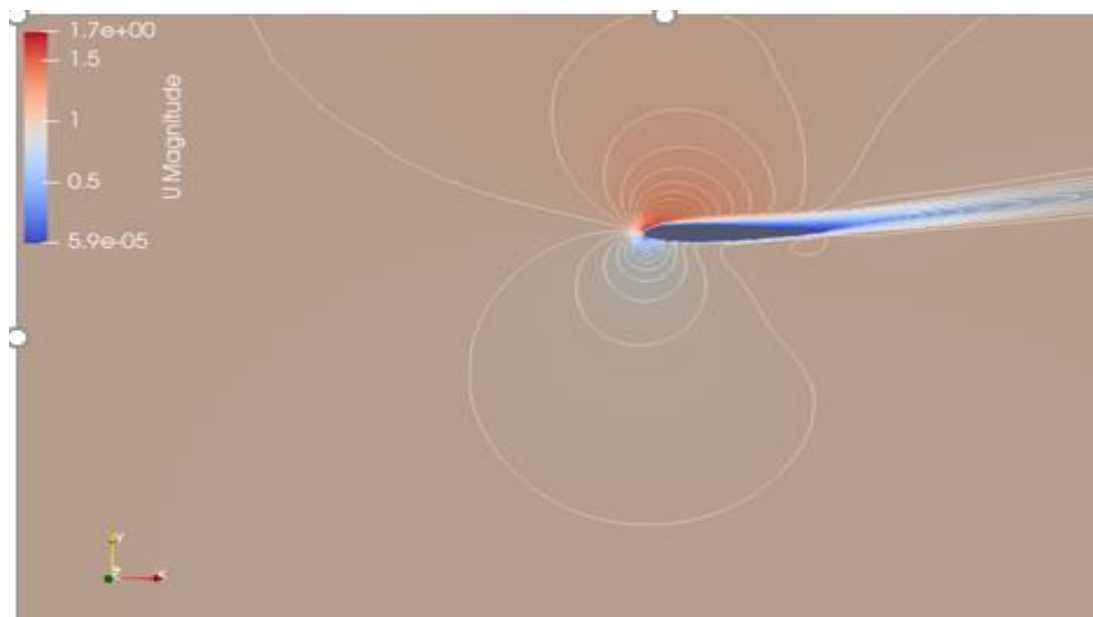
Εικόνα 17: Ισοταχείς καμπύλες Spalart Allmaras για SnappyHexMesh



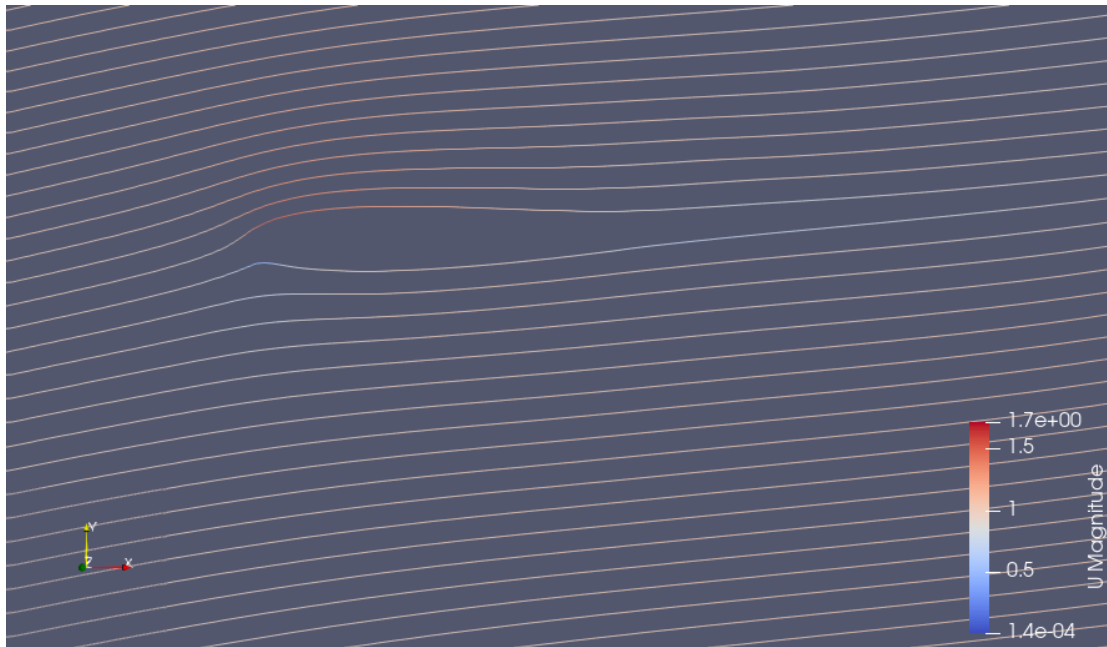
Εικόνα 18: Ισοβαρείς καμπύλες Spalart Allmaras για SnappyHexMesh



Εικόνα 19 : Ισοβαρείς καμπύλες k- ω SST για SnappyHexMesh



Εικόνα 20: Ισοταχείς καμπύλες k- ω SST για SnappyHexMesh



Εικόνα 21: Ροϊκές γραμμές για k- ω SST- SnappyHexMesh

Σε αυτό το σημείο μπορεί να ειπωθεί ότι τα αποτελέσματα είναι σχετικά ίδια σε όλες τις περιπτώσεις κάτι που σημαίνει και επιβεβαιώνει ότι το πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο . Σαν κοινή παρατήρηση είναι ότι παντού υπάρχει υψηλότερη ταχύτητα και συνεπώς μικρότερη πίεση στο **άνω μέρος** της *αεροτομής* και αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη στο κάτω μέρος της αεροτομής κάτι που επιβεβαιώνει και μια από τις βασικές αρχές αεροδυναμικής που θίχτηκε στο πρώτο μέρος της εργασίας.

2.3 ΜΕΛΕΤΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Για τον πρώτο τρόπο δόμησης πλέγματος έχουν δημιουργηθεί 14300 κελιά . Τώρα θα πυκνωθούνε κατά 1.2 φορές σε κάθε διεύθυνση όποτε ο συνολικός αριθμός θα είναι στα 20640

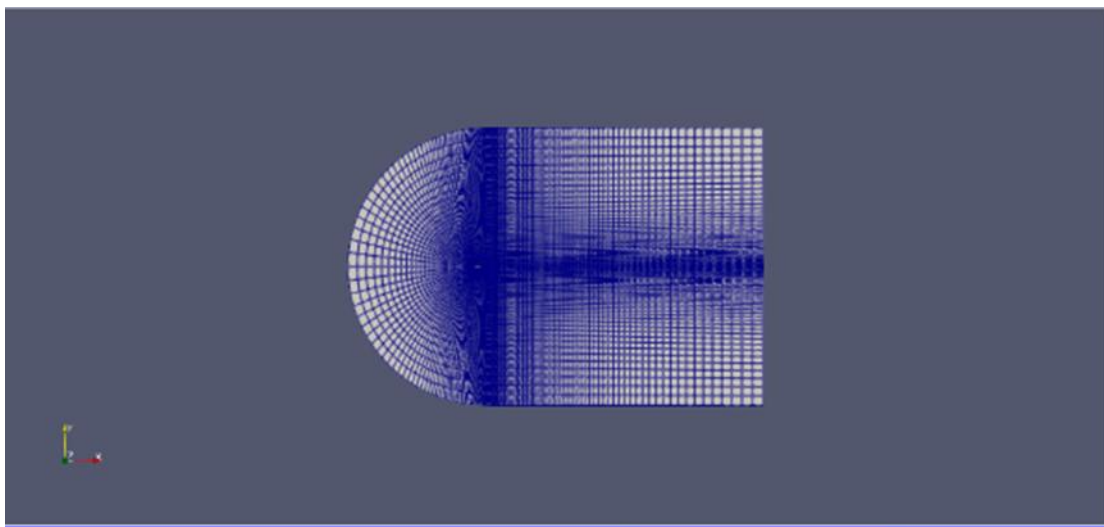
κελιά και εν τέλει στα 29808. Τα αποτελέσματα αποφασίστηκε να παρουσιαστούν σε πινακοποιημένη μορφή :

C_L	C_D	C_L	C_D
20640		29808	
0.41	0.043	0.421	0.043
0.75	0.065	0.76	0.064
0.75	0.092	0.79	0.086

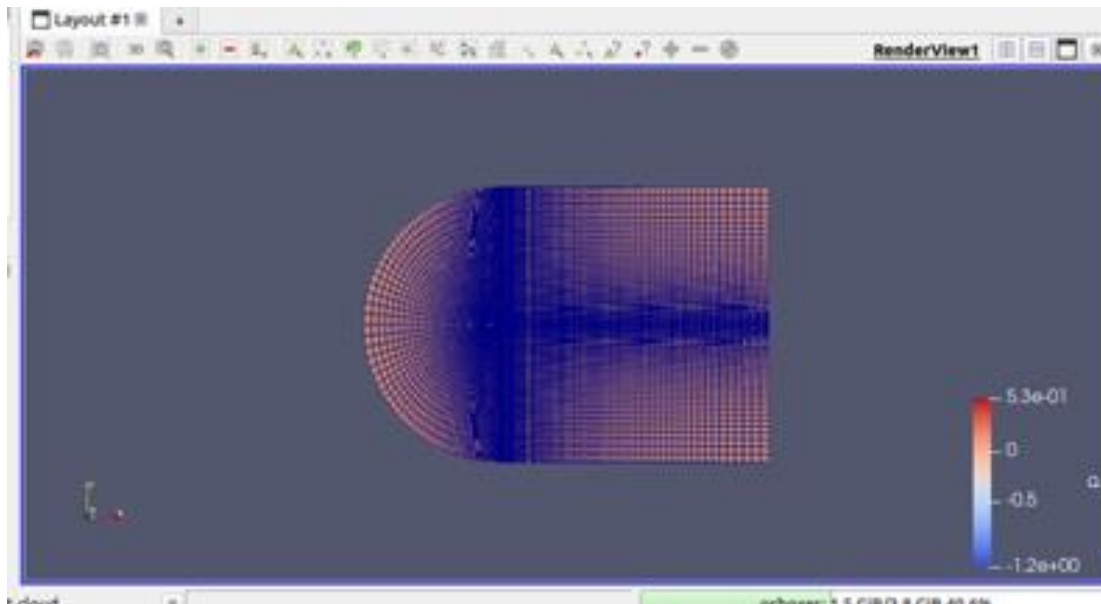
πίνακας 5: Μελέτης ανεξαρτησίας πλέγματος

Τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν πολύ η μελέτη ανεξαρτησίας πραγματοποιήθηκε επιτυχώς και θα κρατηθούν τα αρχικά αποτελέσματα ώστε η προσομοίωση να έχει όσο το δυνατόν και ένα μικρό υπολογιστικό κόστος .

Επίσης ,σε αυτό το σημείο επιλέχθηκε να παρατεθούν και οι εικόνες με το πλέγμα με αυξημένο αριθμό κελιών .



Εικόνα 22: Αρχική πυκνωση στα 20640

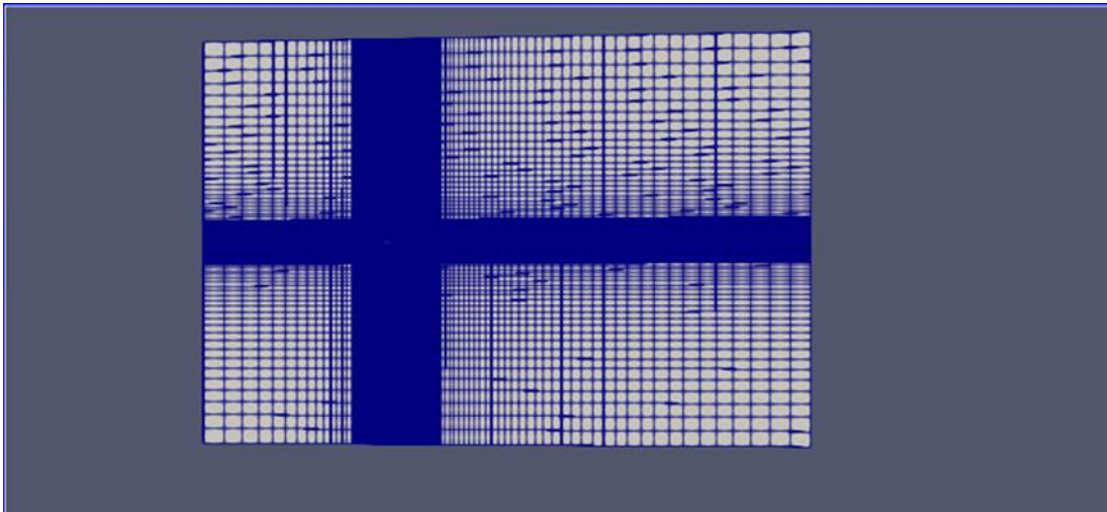


Εικόνα 23: Τελική πύκνωση στα 29808 κελιά

Προχωράμε στη μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος με τη χρήση SnappyHexMesh. Για το λόγο αυτό θα πυκνωθεί το background Mesh κατά 1.2 φορές στη κάθε διεύθυνση. Έτσι, έγινε μια πύκνωση στα 17280 κελιά στο background mesh και τα 123000 κελιά με τη χρήση του SnappyHexMesh.

C_L	C_D
17280	
0.41	0.035
0.73	0.07
0.58	0.14

πίνακας 6 : Αεροδυναμικοί συντελεστές για 123000 κελιά



εικόνα 24: Πύκνωση στα 123000 κελιά

Επειδή το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται απότομα χωρίς το ποσοστό αλλαγής να ξεπερνάει το 1% στους αεροδυναμικούς συντελεστές, αποφασίστηκε να μη γίνει και άλλη πύκνωση του πλέγματος.

Συνεπώς και στις δύο μελέτες προτιμάται το αραιότερο πλέγμα για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους και καταδεικνύεται άλλη μια φορά πως το πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο.

2.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΥΡΒΗΣ

Έχοντας εκτελέσει τις προσομοιώσεις και για τα δύο μοντέλα τύρβης παρατηρήθηκε ότι το μοντέλο της $k-\omega$ SST είναι πιο ακριβές από το Spalart-Allmaras. Αυτό είναι λογικό μιας και είναι και πιο σύγχρονο μοντέλο και χρησιμοποιείται πιο ευρέως από τους επιστήμονες όταν έρχεται η ώρα να κάνουν μια αεροδυναμική μελέτη με RANS μοντέλα τύρβης. Επίσης, όταν

αρχικά έγινε μελέτη αγνοώντας τη τύρβη παρά τα υψηλά Reynolds υπήρξαν μεγάλες αποκλίσεις στα αποτελέσματα . Αυτός είναι και ο λόγος που επιλέχθηκε να μη παρουσιαστεί καν αυτό το ενδεχόμενο. Συνεπώς, μπορεί να διατυπώσει κανείς πως η χρήση ενός μοντέλου τύρβης από τη μη χρήση επηρεάζει κομβικά τα αποτελέσματα της εκάστοτε μελέτη .Τέλος, δεν μειώνεται η αξιοπιστία του Spalart-Allmaras καθώς παρείχε και αυτό αποτελέσματα κοντά στο paper που βρέθηκε για τη αξιολόγηση της μελέτης.

2.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση της ροής αέρα γύρω από την αεροτομή με τη χρήση του OpenFOAM κατέληξε σε σημαντικά συμπεράσματα:

Η μελέτη σύγκρισης των μοντέλων τύρβης Spalart-Allmaras και k- ω -SST έδειξε ότι το k- ω -SST είναι πιο ακριβές, κάτι που επιβεβαιώνεται από την καλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας. Η μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος κατέδειξε ότι η αύξηση του αριθμού των κελιών δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, επιβεβαιώνοντας την επάρκεια του αρχικού πλέγματος. Η ανάλυση ανέδειξε τη σημασία της χρήσης μοντέλων τύρβης για την ακριβή πρόβλεψη της ροής γύρω από την αεροτομή, ειδικά σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, καθώς η αγνοία της τύρβης οδηγεί σε σημαντικές αποκλίσεις από τα πραγματικά δεδομένα. Η υπολογιστική ρευστοδυναμική μέσω του OpenFOAM αποδείχθηκε αποτελεσματική στην προσομοίωση και ανάλυση της ροής αέρα γύρω από αεροτομές, προσφέροντας μεγάλη ευελιξία και δυνατότητα για λεπτομερείς αναλύσεις με χαμηλό κόστος σε σύγκριση με τις πειραματικές

δοκιμές. Η μελέτη επιβεβαίωσε τη δυνατότητα χρήσης των αποτελεσμάτων για τη βελτίωση της σχεδίασης αεροτομών σε διάφορες εφαρμογές, όπως στην αεροναυπηγική, την αυτοκινητοβιομηχανία και τις ανεμογεννήτριες. Η χρήση του OpenFOAM σε συνδυασμό με το openVSP για τη δημιουργία γεωμετρίας αποδείχθηκε αποτελεσματική, επιτρέποντας την εύκολη προσαρμογή και τροποποίηση των μοντέλων κατά τη διάρκεια της μελέτης. Αυτά τα συμπεράσματα δείχνουν την αξία της χρήσης υπολογιστικών εργαλείων για την ανάλυση αεροδυναμικών προβλημάτων και την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων με μειωμένο κόστος και χρόνο. Παρότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση στον συντελεστή άνωσης, τα δεδομένα πάρθηκαν από την πειραματική διαδικασία του paper, ενώ από τα αποτελέσματα της υπολογιστικής διαδικασίας του paper παρατηρήθηκε λιγότερο από 5% απόκλιση από τη παρουσιασμένη ανάλυση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] NASA. (n.d.). *FoilSim: Aerodynamics Simulation Program Manual*. Retrieved from <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/FoilSim/Manual/fsim001n.htm>
- [2] Benson, T. (2021, May 13). *Boundary Layer*. NASA. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/BGP/boundlay.html>
- [3] Παπαγιάννης, Δ. “Computational modeling of the flow around a wing”. Διπλωματική εργασία. <https://core.ac.uk/download/pdf/38429752.pdf>
- [4] NASA Langley Research Center. (n.d.). *Spalart-Allmaras model*. NASA. Retrieved June 2, 2024, from <https://turbmodels.larc.nasa.gov/spalart.html>
- [5] OpenFOAMWiki. (n.d.). *The SIMPLE algorithm in OpenFOAM*. Retrieved June 2, 2024, from https://openfoamwiki.net/index.php/OpenFOAM_guide/The_SIMPLE_algorithm_in_OpenFOAM
- [6] OpenFOAMWiki. (n.d.). *The SIMPLE algorithm in OpenFOAM*. Retrieved June 2, 2024, from [OpenFOAMWiki](#).
- [7] Ferziger, J. H., & Peric, M. (2001). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- [8] Moin, P., & Kim, J. (1997). *Turbulence Simulation and Modeling*. Annual Review of Fluid Mechanics, 23(1), 225-281.
- [9] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," Recherche Aerospatiale, No. 1, 1994, σελ. 5-21
- [10] OpenFOAM Foundation. (n.d.). *The k-omega SST model*. Retrieved June 2, 2024, from [OpenFOAM Documentation](#).

- [11] Spalart, P. R., "Trends in Turbulence Treatments," AIAA 2000-2306, Ιούνιος 2000, <https://doi.org/10.2514/6.2000-2306>
- [12] OpenFOAM Foundation. (n.d.). *Mesh generation with the blockMesh utility*. Retrieved June 2, 2024, from [OpenFOAM User Guide](#).
- [13] OpenFOAM Foundation. (n.d.). *Mesh generation with the snappyHexMesh utility*. Retrieved June 2, 2024, from [OpenFOAM User Guide](#).
- [14] Sharma, A., & Srinivas, K. (2015). *Effect of Particle Size on the Performance of a Cyclone Separator – A CFD Study*. International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing, 3(2), 97-102. Retrieved June 2, 2024, from <https://www.ijmmm.org/vol3/159-TT3010.pdf>.
- [15] Anderson, J. D. (2011). *Fundamentals of Aerodynamics* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
- [16] Schlichting, H., & Gersten, K. (2016). *Boundary-Layer Theory*. Springer.
- [17] White, F. M. (2016). *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill Education.
- [18] Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2015). *Fluid Mechanics*. Academic Press.
- [19] Panton, R. L. (2013). *Incompressible Flow*. John Wiley & Sons.
- [20] Fitzpatrick, R. (2016). Boundary layer on a flat plate. Retrieved from <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid/node113.html>
- [21] Fitzpatrick, R. (2016). Courant number. Retrieved from <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid/node113.html>
- [22] OpenFOAM Wiki. (n.d.). 2D Structural Mechanics Example. Retrieved from https://openfoamwiki.net/index.php/Main_ContribExamples/2DsHM

- [23] Cadence. (n.d.). Y+ in CFD: Understanding the Non-Dimensional Distance Parameter. Retrieved from https://www.cadence.com/en_US/home/tools/system-analysis/computational-fluid-dynamics/y-plus.html
- [24] Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- [25] Davidson, P. A. (2015). *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press.
- [26] Weller, H.G., Tabor, G., Jasak, H. and Fureby, C. (1998) A Tensorial Approach to Computational Continuum Mechanics Using Object-Oriented Techniques. *Computers in Physics*, 12, 620-631. <http://dx.doi.org/10.1063/1.168744>

